Travaux mathématiques, Volume 21 (2012), 1–28,

Quasi-bigèbres de Lie et cohomologie d'algèbre de Lie

Ibrahima Bakayoko[1] et Momo Bangoura[2]

Abstract

Lie quasi-bialgebras are natural generalisations of Lie bialgebras introduced by Drinfeld. To any finite-dimensional Lie quasi-bialgebra structure $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$, correspond a Lie algebra structure on $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$, called the double of the given Lie quasi-bialgebra. We show that there exist on $\Lambda\mathcal{G}$, the exterior algebra of $\mathcal{G}$, a $\mathcal{D}$-module structure and we establish an isomorphism of $\mathcal{D}$-modules between $\Lambda\mathcal{D}$ and $End(\Lambda\mathcal{G})$, $\mathcal{D}$ acting on $\Lambda\mathcal{D}$ by the adjoint action.

Résumé

Les quasi-bigèbres de Lie sont des généralisations naturelles, introduites par Drinfeld, des bigèbres de Lie. A toute structure de quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ de dimension finie, il correspond une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$, appelée le double de la quasi-bigèbre de Lie donnée. On montre qu'il existe sur $\Lambda\mathcal{G}$, l'algèbre extérieure de $\mathcal{G}$, une structure de $\mathcal{D}$-module et nous établissons un isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules entre $\Lambda\mathcal{D}$ et $End(\Lambda\mathcal{G})$, $\mathcal{D}$ agissant sur $\Lambda\mathcal{D}$ par l'action adjointe.

1 Introduction

Le but de ce travail est de construire pour une quasi-bigèbre de Lie donnée $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$, une représentation naturelle de son double $\mathcal{D}$ sur l'algèbre extérieure de $\mathcal{G}$, ou encore une structure de $\mathcal{D}$-module sur $\Lambda\mathcal{G}$, de telle sorte qu'il existe un isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules entre $\Lambda\mathcal{D}$ et $End(\Lambda\mathcal{G})$, $\mathcal{D}$ agissant sur $\Lambda\mathcal{D}$ par l'action adjointe. On généralise enfin ce résultat au cas des proto-bigèbres de Lie. Les principaux résultats obtenus sont des généralisations aux quasi-bigèbres de Lie de certains résultats établis par J. Hua Lu ([13]) dans le cas des bigèbres de Lie. La motivation de ce travail vient de la théorie des procédés de réduction et de quantisation développée par B. Kostant et S. Sternberg dans ([10]), une étude

Mots clés: Algèbre de Lie, algèbre extérieure, cohomologie, module, représentation, bigèbre de Lie, quasi-bigèbre de Lie, algèbre de Clifford, isomorphisme.

Classification AMS: 17A30, 17B56, 17B70

[1]Recherches financées par DAAD

[2]Senior Associate of the Abdus Salam ICTP, Trieste, Italy

basée sur les relations entre les algèbres extérieures, les algèbres de Lie munies d'un produit scalaire invariant et les algèbres de Clifford.

Les quasi-bigèbres de Lie ([5]) ou quasi-bigèbres jacobiennes ([1], [3], [8]) sont des généralisations naturelles des bigèbres de Lie ([4]), introduites par Drinfeld comme étant les limites classiques des algèbres quasi-Hopf; contrairement aux bigèbres de Lie, elles sont caractérisées par l'existence d'un défaut d'identité de co-Jacobi pour le co-crochet, qui est en fait le cobord d'un certain élément de $\Lambda^3\mathcal{G}$, où $\mathcal{G}$ est l'espace vectoriel sur lequel est définie la structure de quasi-bigèbre de Lie, alors que pour les bigèbres de Lie, ce défaut est nul.
Dans la section 2, nous faisons un bref rappel de quelques notions fondamentales qui sont les outils de travail dans toute la suite, notamment le crochet de Schouten algébrique, la cohomologie d'algèbre de Lie.
Dans la section 3, nous rappelons la définition et les propriétés des quasi-bigèbres de Lie et à partir d'une structure de quasi-bigèbre de Lie donnée $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$, nous définissons des dérivations sur $\Lambda\mathcal{G}$ et $\Lambda\mathcal{G}^*$, qui sont liées par un ensemble de relations, conséquences des axiomes de la structure de quasi-bigèbre de Lie.
La section 4 recouvre l'essentiel du travail, à savoir la définition d'une représentation canonique de l'algèbre de Lie double $\mathcal{D}$ d'une quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ sur son algèbre extérieure $\Lambda\mathcal{G}$ et l'établissement d'un isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules entre $\Lambda\mathcal{D}$ et $End(\Lambda\mathcal{G})$, $\mathcal{D}$ agissant sur $\Lambda\mathcal{D}$ par l'action adjointe. Pour cela nous utilisons les définitions et constructions de ([10], [13]) basées sur les relations entre les algèbres extérieures, les algèbres de Lie munies d'un produit scalaire invariant et les algèbres de Clifford ([10], [7], [13]). Nous généralisons enfin ces deux résultats au cas des proto-bigèbres de Lie en utilisant les mêmes constructions.

Dans toute la suite nous supposerons les structures d'algèbre de Lie de dimension finie. Ainsi, si $(\mathcal{G}, \mu)$ est une algèbre de Lie et $\mathcal{G}^*$ son espace vectoriel dual, le crochet de dualité entre $\Lambda\mathcal{G}$ et $\Lambda\mathcal{G}^*$ étendant celui entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$ est défini par

$$< \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge ... \wedge \xi_m, x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n >= \delta_m^n det(< \xi_i, x_j >),$$

$\xi_i \in \mathcal{G}^*, i = 1, ..., m, x_j \in \mathcal{G}, j = 1, ..., n.$
Pour tous $X \in \Lambda\mathcal{G}$, notons par $\varepsilon_X \in End(\wedge\mathcal{G})$ l'application définie par

$$Y \in \Lambda\mathcal{G} \rightarrow X \wedge Y \in \Lambda\mathcal{G},$$

et par $i_X \in End(\Lambda\mathcal{G}^*)$ sa transposée définie par

$$< i_X A, Y >=< A, X \wedge Y >, \forall Y\Lambda \in \mathcal{G}, \forall A \in \Lambda\mathcal{G}^*.$$

Pour plus détails sur les propriétés de ces deux opérateurs, voir ([7]).

2 Préliminaires

Dans cette section, nous rappelons certaines notions standard utiles pour la suite du travail.

2.1 Crochet de Schouten algébrique

Soit $(\mathcal{G}, \mu)$ une algèbre de Lie sur le corps $\mathbb{K}$, supposé égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, où $\mu : \Lambda^2\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ est le crochet d'algèbre de Lie sur $\mathcal{G}$. On a la définition suivante ([12]):

Définition 2.1. Le crochet de Schouten algébrique est la structure d'algèbre de Lie graduée $[,]^\mu$, sur l'algèbre extérieure, $\Lambda\mathcal{G} = \bigoplus_{p\geq -1} \wedge^{p+1}\mathcal{G}$, de $\mathcal{G}$ qui :
(i) s'annule si l'un des arguments est dans $\mathbb{K}$,
(ii) étend le crochet de Lie μ, i.e

$$[x, y]^\mu = \mu(x, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{G},$$

(iii) satisfait la règle suivante sur le degré :

$$[X, Y]^\mu \in \wedge^{p+q+1}\mathcal{G}, \quad \text{si} \quad X \in \wedge^{p+1}\mathcal{G} \quad \text{et} \quad Y \in \wedge^{q+1}\mathcal{G},$$

(iv) satisfait l'anti-commutativité graduée, i.e

$$[X, Y]^\mu = -(-1)^{pq}[Y, X]^\mu, \quad \text{si} \quad X \in \Lambda^{p+1}\mathcal{G} \quad \text{et} \quad Y \in \Lambda^{q+1}\mathcal{G},$$

(v) satisfait la règle de Leibniz graduée, i.e

$$[X, Y \wedge Z]^\mu = [X, Y]^\mu \wedge Z + (-1)^{p(q+1)} Y \wedge [X, Z]^\mu,$$

si $X \in \Lambda^{p+1}\mathcal{G}$, $Y \in \Lambda^{q+1}\mathcal{G}$ et $Z \in \Lambda\mathcal{G}$, et
(vi) satisfait l'identité de Jacobi graduée, i.e

$$(-1)^{pr}[[X, Y]^\mu, Z]^\mu + (-1)^{pq}[[Y, Z]^\mu, X]^\mu + (-1)^{qr}[[Z, X]^\mu, Y]^\mu = 0,$$

si $X \in \Lambda^{p+1}\mathcal{G}$, $Y \in \Lambda^{q+1}\mathcal{G}$ et $Z \in \Lambda^{r+1}\mathcal{G}$.

Remarque 2.1. On peut définir un tel crochet sur $\Lambda\mathcal{G}$ pour tout élément $\mu \in Hom(\Lambda^2\mathcal{G}, \mathcal{G})$; l'anti-commutativité graduée et la règle de Leibniz graduée restent en vigueur, mais en général le crochet $[,]^\mu$ ne vérifie pas l'identité de Jacobi graduée et il la vérifie si et seulement si $(\mathcal{G}, \mu)$ est une algèbre de Lie ([12]). Dans toute la suite le terme crochet signifiera un élément de $Hom(\Lambda^2\mathcal{G}, \mathcal{G})$; il sera un crochet de Lie s'il vérifie l'identité de Jacobi.

On a le résultat suivant

Proposition 2.1. *Soit $(\mathcal{G}, \mu)$ une algèbre de Lie. Alors, $\forall x \in \mathcal{G}$, $Y \in \Lambda\mathcal{G}$, on a*

$$\varepsilon_{[x,Y]^\mu} = [ad_x, \varepsilon_Y],$$

où $ad : x \in \mathcal{G} \to ad_x \in End(\mathcal{G})$ est la représentation adjointe de $\mathcal{G}$, définie, pour $y \in \mathcal{G}$, par $ad_x y = \mu(x, y)$ et $[,]$ désigne le crochet commutateur des endormorphismes.

La démonstration de cette proposition est une traduction de la règle de Leibniz graduée du crochet $[,]^\mu$. $\triangle$

2.2 Cohomologie d'algèbre de Lie

Soit $(\mathcal{G}, \mu)$ une algèbre de Lie et soit M un $\mathcal{G}$-module, c'est-à-dire que $\mathcal{G}$ agit sur M. Par exemple $\mathcal{G}$ agit sur elle-même (plus généralement sur son algèbre tensorielle) par la représentation adjointe.
$\mathcal{G}$ agit sur son algèbre tensorielle de la manière suivante ; pour des éléments décomposables, $y_1 \otimes y_2 \otimes .... \otimes y_n \in \bigotimes^n \mathcal{G}$,

$$x.(y_1 \otimes y_2 \otimes .... \otimes y_n) = \sum_{i=1}^{n} y_1 \otimes y_2 \otimes .... \otimes (ad_x y_i) \otimes ... \otimes y_n.$$

Définition 2.2. L'espace vectoriel des applications k-linéaires antisymétriques sur $\mathcal{G}$ à valeurs dans M est appelée l'espace des k-cochaines de $\mathcal{G}$ à valeurs dans M.

Désignons par $\mathcal{C}^k(\mathcal{G}, M)$, l'espace vectoriel des k-cochaines de $\mathcal{G}$ à valeurs dans M et $\mathcal{C}(\mathcal{G}, M) = \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{C}^k(\mathcal{G}, M)$.

Définition 2.3. L'opérateur cobord de Chevalley-Eilenberg de $\mathcal{G}$ à valeurs dans M, noté $\delta_\mu : \mathcal{C}(\mathcal{G}, M) \to \mathcal{C}(\mathcal{G}, M)$, est l'application linéaire de degré 1 définie par :

$$\begin{aligned}(\delta_\mu \alpha)(x_0, ..., x_k) = & \textstyle\sum_{i=0}^{k} (-1)^i x_i.(\alpha(x_0, ..., \hat{x_i}, ..., x_k)) \\ & + \textstyle\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha(\mu(x_i, x_j), x_0, ..., \hat{x_i}, ..., \hat{x_j}, ..., x_k)\end{aligned}$$

pour $\alpha \in \mathcal{C}^k(\mathcal{G}, M)$, $x_i \in \mathcal{G}, i = 0, 1, ..., k$; $x_i.m$ désignant l'action de $x_i \in \mathcal{G}$ sur $m \in M$ et $\hat{x_i}$ indiquant l'omission de l'argument x_i.

Remarque 2.2. On peut définir un tel opérateur δ_μ pour tout élément $\mu \in Hom(\Lambda^2\mathcal{G}, \mathcal{G})$. En général $\delta_\mu^2 \neq 0$ et $\delta_\mu^2 = 0$ si et seulement si $(\mathcal{G}, \mu)$ est une algèbre de Lie ([11]).

Définition 2.4. Une k-cochaine α est appelée un k-cocycle si $\delta_\mu \alpha = 0$. Une k-cochaine α est appelée un k-cobord si il existe une (k-1)-cochaine β, telle que $\alpha = \delta_\mu \beta$.

Remarque 2.3. Les 0-cocycles de $\mathcal{G}$ à valeurs dans M sont les éléments invariants dans M, i.e les éléments $m \in M$ tels que $x.m = 0$, pour tous $x \in \mathcal{G}$.

2.3 La représentation co-adjointe

On introduit à présent la définition de la représentation co-adjointe d'une algèbre de Lie sur son espace vectoriel dual.
Soit $(\mathcal{G}, \mu)$ une algèbre de Lie et soit $\mathcal{G}^*$ son espace vectoriel dual. Pour $x \in \mathcal{G}$, posons

$$ad_x^* = -{}^t(ad_x).$$

Comme on le voit par définition, $ad_x^* \in End(\mathcal{G}^*)$ et satisfait la relation

$$< ad_x^*\xi, y >= - < \xi, ad_x y >= - < \xi, \mu(x,y) >,$$

pour $x \in \mathcal{G}$, $\xi \in \mathcal{G}^*$. On montre facilement que l'application $x \in \mathcal{G} \to ad_x^* \in End(\mathcal{G}^*)$ est une représentation de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}^*$. D'où

Définition 2.5. La représentation $x \to ad_x^*$ de $\mathcal{G}$ dans $End(\mathcal{G}^*)$ est appelée la représentation co-adjointe de $\mathcal{G}$.

De la proposition 2.1 et de la définition précédente, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 2.2. *Soit $(\mathcal{G}, \mu)$ une algèbre de Lie. Alors, $\forall x \in \mathcal{G}$, $Y \in \Lambda\mathcal{G}$, on a*

$$i_{[x,Y]^\mu} = [ad_x^*, i_Y].$$

3 Quasi-bigèbres de Lie

Les quasi-bigèbres de Lie ([5]) (appelées quasi-bigèbres jacobiennes dans ([1], [3], [8])) sont les limites classiques des algèbres quasi-Hopf ([5]), introduites par Drinfeld.

3.1 Définitions et notations

Définition 3.1. Une quasi-bigèbre de Lie est un quadruplet $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ où $\mathcal{G}$ est un espace vectoriel muni d'un crochet $\mu \in Hom(\Lambda^2\mathcal{G}, \mathcal{G})$, d'un co-crochet $\gamma \in Hom(\mathcal{G}, \Lambda^2\mathcal{G})$ et d'un élément $\phi \in \Lambda^3\mathcal{G}$ tels que :

3.1. $(\mathcal{G}, \mu)$ est une algèbre de Lie;

3.2. γ est un 1-cocycle de l'algèbre de Lie $(\mathcal{G}, \mu)$, à valeurs dans $\Lambda^2\mathcal{G}$ pour l'action adjointe définie par μ, i.e $\delta_\mu\gamma = 0$;

3.3. $\frac{1}{2}Alt(\gamma \otimes 1)\gamma(x) = (\delta_\mu\phi)(x), \forall x \in \mathcal{G}$;

3.4. $Alt(\gamma \otimes 1 \otimes 1)(\phi) = 0;$

où Alt est l'opérateur alternateur défini sur l'algèbre tensorielle de $\mathcal{G}$ par

$$Alt(x_1 \otimes .... \otimes x_n) = \sum_\sigma sign(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma(n)},$$

$x_i \in \mathcal{G}, i = 1, ..., n$, σ étant une permutation de $\{1, ..., n\}$ et $sign(\sigma)$ la signature de la permutation σ.

Remarque 3.1. 1- Dans le cas où $\phi = 0$, le triplet $(\mathcal{G}, \mu, \gamma)$ satisfaisant les conditions ci-dessus, n'est rien d'autre qu'une bigèbre de Lie ([4]).
2- La condition 3.3 signifie que γ ne vérifie pas l'identité co-Jacobi et donc son transposé n'est pas un crochet de Lie sur $\mathcal{G}^*$. Ainsi, contrairement à la notion de bigèbre de Lie, la notion de quasi-bigèbre de Lie n'est pas auto-duale, l'objet dual est appelé une bigèbre quasi-Lie ([5]) ou quasi-bigèbre co-jacobienne ([1], [8]). Dans ce travail nous considérerons pour des fins d'usage, l'opposé du transposé de γ comme étant le crochet sur $\mathcal{G}^*$ et nous le noterons aussi par γ pour simplicité d'écriture, i.e

$$< \gamma(x), \xi \wedge \eta >= - < x, \gamma(\xi, \eta) >, \forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*.$$

3- Dans la condition 3.3, $\phi : \mathbb{K} \to \wedge^3 \mathcal{G}$ est considéré comme une 0-forme sur $\mathcal{G}$ à valeurs dans $\Lambda^3 \mathcal{G}$, tandis que si nous considérons $\phi : \Lambda^3 \mathcal{G}^* \to \mathbb{K}$ comme une 3-forme sur $\mathcal{G}^*$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors la condition 3.4 de la définition ci-dessus est équivalente à $\delta_\gamma \phi = 0$.
4- La condition 3.2 s'écrit explicitement sous la forme

$$\gamma(\mu(x, y)) = (ad_x^\mu \otimes 1 + 1 \otimes ad_x^\mu)\gamma(y) - (ad_y^\mu \otimes 1 + 1 \otimes ad_y^\mu)\gamma(x),$$

où $ad_x^\mu y = \mu(x, y), \forall x, y \in \mathcal{G}$, ou de façon équivalente

$$\mu(\gamma(\xi, \eta)) = (ad_\xi^\gamma \otimes 1 + 1 \otimes ad_\xi^\gamma)\mu(\eta) - (ad_\eta^\gamma \otimes 1 + 1 \otimes ad_\eta^\gamma)\mu(\xi),$$

où $ad_\xi^\gamma \eta = \gamma(\xi, \eta), \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*$, et l'application μ et sa transposée sont notées par μ pour simplicité d'écriture.

La donnée d'une structure de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{G}$ détermine une unique structure d'algèbre de Lie $[,]_\mathcal{D}$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ qui laisse invariant le produit scalaire canonique sur $\mathcal{D}$,

$$< \xi + x, y + \eta >=< \xi, y > + < x, \eta >, \quad \forall \xi + x \in \mathcal{D}^*, \forall y + \eta \in \mathcal{D},$$

en posant

$$[x, y]_\mathcal{D} = \mu(x, y),$$
$$[x, \xi]_\mathcal{D} = -ad_\xi^{\gamma *} x + ad_x^{\mu *} \xi,$$

$$[\xi,\eta]_{\mathcal{D}} = \phi(\xi,\eta) + \gamma(\xi,\eta),$$

où $< ad_x^{\mu*}\xi, y >= - < \xi, \mu(x,y) >$, $< ad_\xi^{\gamma*}x, \eta >= - < x, \gamma(\xi,\eta) >$ et $\phi(\xi,\eta) = i_{\xi\wedge\eta}\phi$, pour tous $x, y \in \mathcal{G}, \xi, \eta \in \mathcal{G}^*$.
Comme on le voit, $(\mathcal{G},\mu)$ est une sous-algèbre de Lie isotrope de $(\mathcal{D}, [,]_{\mathcal{D}})$, alors que $\mathcal{G}^*$ ne l'est pas, il est juste un sous-espace isotrope de $\mathcal{D}$, à cause de l'existence de ϕ. En général, on montre dans ([8]) que les structures de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{G}$ sont en correspondance biunivoque avec les structures d'algèbre de Lie sur $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ laissant invariant le produit scalaire canonique, dont $\mathcal{G}$ est une sous-algèbre de Lie. Dans ces conditions le couple $(\mathcal{D},\mathcal{G})$, avec le produit scalaire canonique sur $\mathcal{D}$, est appelé un **couple de Manin** ([5]). L'étude des quasi-bigèbres de Lie est rendue facile grâce au twisting ([5], [8]) appelé modification dans ([1]), qui consiste à construire de nouvelles structures de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{G}$ à partir d'une déjà connue; ce qui permet de les étudier en termes de classes d'équivalence ([8]), en montrant que les classes d'équivalence modulo twisting sont en correspondance biunivoque avec les couples de Manin.

Définition 3.2. Soit $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ une quasi-bigèbre de Lie. $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ muni du crochet de Lie $[,]_{\mathcal{D}}$ défini ci-dessus est appelé le double de la quasi-bigèbre de Lie donnée, et noté $\mathcal{G} \bowtie \mathcal{G}^*$.

Définition 3.3. Une quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ est dite exacte ou cobord si il existe un élément $r \in \Lambda^2\mathcal{G}$ tel que le 1-cocycle $\gamma : \mathcal{G} \to \Lambda^2\mathcal{G}$ soit le cobord de r, i.e

$$\gamma(x) = (\delta_\mu r)(x) = [x,r]^\mu = -[r,x]^\mu, \forall x \in \mathcal{G},$$

et

$$\phi = -\frac{1}{2}[r,r]^\mu.$$

Montrons à présent que le double de toute quasi-bigèbre de Lie est muni, en plus de la structure d'algèbre de Lie définie par $[,]_{\mathcal{D}}$, d'une structure canonique de quasi-bigèbre de Lie exacte ([3]).

Théorème 3.1. *Soit $\mathcal{D} = \mathcal{G} \bowtie \mathcal{G}^*$ le double d'une quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$. Soit (e_i) une base de $\mathcal{G}$ et (ξ^i) la base duale de $\mathcal{G}^*$. Posons*

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}\sum_i e_i \wedge \xi^i.$$

Alors $(\mathcal{D},\mathbf{r})$ est une quasi-bigèbre de Lie exacte et est appelée la quasi-bigèbre de Lie double de $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$.

Nous avons le résultat suivant ([1]):

Proposition 3.1. *Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie. Alors nous avons les relations suivantes :*

3.5. $ad^{\mu *}_{\mu(x,y)} = [ad^{\mu *}_x, ad^{\mu *}_y], \forall x, y \in \mathcal{G}$;

3.6. $ad^{\gamma *}_\xi \mu(x,y) = \mu(ad^{\gamma *}_\xi x, y) + \mu(x, ad^{\gamma *}_\xi y) + ad^{\gamma *}_{ad^{\mu *}_y \xi} x - ad^{\gamma *}_{ad^{\mu *}_x \xi} y$
$\forall x, y \in \mathcal{G}, \forall \xi \in \mathcal{G}^*$;

3.7. $ad^{\gamma *}_{\gamma(\xi,\eta)} x = [ad^{\gamma *}_\xi, ad^{\gamma *}_\eta](x) + ad^{\mu}_x \phi(\xi, \eta) - \phi(ad^{\mu *}_x \xi, \eta) - \phi(\xi, ad^{\mu *}_x \eta)$,
$\forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*$;

3.8. $ad^{\mu *}_x \gamma(\xi, \eta) = \gamma(ad^{\mu *}_x \xi, \eta) + \gamma(\xi, ad^{\mu *}_x \eta) + ad^{\mu *}_{ad^{\gamma *}_\eta x} \xi - ad^{\mu *}_{ad^{\gamma *}_\xi x} \eta$,
$\forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*$;

3.9. $\oint \gamma(\gamma(\xi, \eta), \zeta) = - \oint ad^{\mu *}_{\phi(\xi,\eta)} \zeta, \forall \xi, \eta, \zeta \in \mathcal{G}^*$;

3.10. $\oint \phi(\gamma(\xi, \eta), \zeta) = \oint ad^{\gamma *}_\xi \phi(\eta, \zeta), \forall \xi, \eta, \zeta \in \mathcal{G}^*$.
où $[,]$ désigne le crochet commutateur des endormorphismes et $\oint$ désigne la somme sur les permutations circulaires des éléments $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{G}^*$.

Démonstration : La preuve de ces différentes relations est une conséquence directe de l'identité de Jacobi pour le crochet d'algèbre de Lie $[,]_{\mathcal{D}}$ défini sur $\mathcal{D} = \mathcal{G} \bowtie \mathcal{G}^*$. $\triangle$
Les relations (3.6) et (3.7) s'étendent aisement sur $\Lambda\mathcal{G}$ grâce au résultat suivant :

Proposition 3.2. *Pour tous $X = x_1 \wedge ... \wedge x_m$ et $Y = y_1 \wedge ... \wedge y_n$ dans $\Lambda\mathcal{G}$, et pour tous $\xi, \eta \in \mathcal{G}^*$, on a*

$$\begin{aligned} ad^{\gamma *}_\xi [X,Y]^\mu &= [ad^{\gamma *}_\xi X, Y]^\mu + [X, ad^{\gamma *}_\xi Y]^\mu + \textstyle\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} ad^{\gamma *}_{ad^{\mu *}_{y_j} \xi} X \wedge \hat{Y}_j \\ &\quad + (-1)^{|X|} \textstyle\sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} \hat{X}_i \wedge ad^{\gamma *}_{ad^{\mu *}_{x_i} \xi} Y, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ad^{\gamma *}_{\gamma(\xi,\eta)} X &= [ad^{\gamma *}_\xi, ad^{\gamma *}_\eta](X) - ad^{\mu}_{\phi(\xi,\eta)} X \\ &\quad + \textstyle\sum_{i=1}^m (-1)^i (\phi(ad^{\mu *}_{x_i} \xi, \eta) + \phi(\xi, ad^{\mu *}_{x_i} \eta)) \wedge \hat{X}_i, \end{aligned}$$

où $\hat{X}_i = x_1 \wedge ... \wedge \hat{x}_i \wedge ... \wedge x_m$ pour $1 \leq i \leq m$ et de manière similaire pour $\hat{Y}_j$, pour $1 \leq j \leq n$.

Démonstration : Ces deux relations se démontrent facilement par récurrence sur les degrés de X et Y, en utilisant la règle de Leibniz graduée du crochet $[,]^\mu$ et la propriété de dérivation de $ad^{\gamma *}_\xi$ sur $(\Lambda\mathcal{G}, \wedge)$ pour tout $\xi \in \mathcal{G}^*$. La première relation est énoncée dans ([13]) dans le cas des bigèbres de Lie. $\triangle$

3.2 Exemples

Exemple 3.1. Toute bigèbre de Lie est une quasi-bigèbre de Lie; il suffit de prendre $\phi = 0$.

Exemple 3.2. Une large classe d'exemples de quasi-bigèbre de Lie est fournie par les quasi-bigèbres de Lie exactes, il suffit de choisir $r \in \Lambda^2\mathcal{G}$.

Exemple 3.3. Soit $(\mathcal{G}, \mu)$ une algèbre de Lie. Alors tout élément $r \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ de partie symétrique ad^μ-invariante, définit une structure de quasi-bigèbre de Lie en posant

$$\gamma = \delta_\mu a, \qquad \phi = -\frac{1}{2}([a, a]^\mu + [s, s]^\mu),$$

où a (resp. s) est la partie antisymétrique (resp. symétrique) de r. Une telle structure est dite quasitriangulaire ([1], [3]).

Exemple 3.4. Soit $(\mathcal{D}, \mathcal{G})$ un couple de Manin; alors tout choix d'un sous-espace supplémentaire isotrope de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{D}$ définit une structure de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{G}$.

3.3 Les dérivations associées à une quasi-bigèbre de Lie

Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie. Alors le crochet μ permet de définir sur $\Lambda\mathcal{G}^*$ l'opérateur cobord de Chevalley-Eilenberg (à coefficients triviaux) et son transposé sur $\Lambda\mathcal{G}$; notons-les respectivement par d_μ et ∂_μ:

$$d_\mu : \Lambda^k\mathcal{G}^* \to \Lambda^{k+1}\mathcal{G}^*$$

$$\partial_\mu : \Lambda^k\mathcal{G} \to \Lambda^{k-1}\mathcal{G}$$

où

$$(d_\mu\xi)(x_1 \wedge ... \wedge x_{k+1}) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\xi(\mu(x_i, x_j) \wedge x_1 \wedge ... \wedge \hat{x_i} \wedge ... \wedge \hat{x_j} \wedge ... \wedge x_{k+1}),$$

$$\partial_\mu(x_1 \wedge ... \wedge x_{k+1}) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\mu(x_i, x_j) \wedge x_1 \wedge ... \wedge \hat{x_i} \wedge ... \wedge \hat{x_j} \wedge ... \wedge x_{k+1},$$

pour $\xi \in \Lambda^k\mathcal{G}^*$, $x_i \in \mathcal{G}, i = 1, ..., k+1$.
De manière similaire, définissons les opérateurs d_γ et ∂_γ associés au crochet γ; ils sont définis respectivement sur $\Lambda\mathcal{G}$ et $\Lambda\mathcal{G}^*$ comme suit :

$$d_\gamma : \Lambda^k\mathcal{G} \to \Lambda^{k+1}\mathcal{G}$$

$$\partial_\gamma : \Lambda^k\mathcal{G}^* \to \Lambda^{k-1}\mathcal{G}^*$$

où

$$(d_\gamma X)(\xi_1 \wedge ... \wedge \xi_{k+1}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} X(\gamma(\xi_i, \xi_j) \wedge \xi_1 \wedge ... \wedge \hat{\xi}_i \wedge ... \wedge \hat{\xi}_j \wedge ... \wedge \xi_{k+1}),$$

$$\partial_\gamma(\xi_1 \wedge ... \wedge \xi_{k+1}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \gamma(\xi_i, \xi_j) \wedge \xi_1 \wedge ... \wedge \hat{\xi}_i \wedge ... \wedge \hat{\xi}_j \wedge ... \wedge \xi_{k+1},$$

pour $X \in \Lambda^k \mathcal{G}$, $\xi_i \in \mathcal{G}^*, i = 1, ..., k+1$.

Remarque 3.2. Pour $k = 1$, d_γ n'est rien d'autre que le 1-cocycle γ.

Il est connu que l'opérateur d_μ est de carré nul, mais $d_\gamma^2 \neq 0$ du fait que γ ne définit pas un crochet de Lie sur $\mathcal{G}^*$. Par ailleurs, les opérateurs d_μ et ∂_μ satisfont les propriétés suivantes ([12], [13]):

$$d_\mu(A \wedge B) = (d_\mu A) \wedge B + (-1)^{|A|} A \wedge (d_\mu B),$$

$$\partial_\mu(X \wedge Y) = (\partial_\mu X) \wedge Y + (-1)^{|X|} X \wedge (\partial_\mu Y) + (-1)^{|X|}[X, Y]^\mu,$$
$$\partial_\mu [X, Y]^\mu = [\partial_\mu X, Y]^\mu + (-1)^{(|X|-1)}[X, \partial_\mu Y]^\mu,$$

pour tous $X, Y \in \Lambda\mathcal{G}$ et $A, B \in \Lambda\mathcal{G}^*$. Les opérateurs d_γ et ∂_γ satisfont les relations similaires.
Dans le cas des bigèbres de Lie, on généralise dans ([13]) la condition de 1-cocycle en montrant que les opérateurs d_μ et d_γ sont des dérivations respectivement de $(\Lambda\mathcal{G}^*, [,]^\gamma)$ et $(\Lambda\mathcal{G}, [,]^\mu)$; le résultat reste vrai dans le cas des quasi-bigèbres de Lie et s'énonce comme suit :

Proposition 3.3. *Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie. Alors, pour $A, B \in \Lambda\mathcal{G}^*$ et $X, Y \in \Lambda\mathcal{G}$, on a :*

$$d_\mu([A, B]^\gamma) = [d_\mu A, B]^\gamma + (-1)^{|A|-1}[A, d_\mu B]^\gamma$$

$$d_\gamma([X, Y]^\mu) = [d_\gamma X, Y]^\mu + (-1)^{|X|-1}[X, d_\gamma Y]^\mu$$

Démonstration : Dans le cas où $|X| = |Y| = 1$ et $|A| = |B| = 1$, les deux identités se réduisent à la condition de 1-cocycle dans la définition d'une quasi-bigèbre de Lie. Le cas général se démontre par récurrence sur les degrés de X, Y, A et B. $\triangle$

Les lemmes suivants seront d'une grande utilité dans la suite :

Lemme 3.1. *Pour une quasi-bigèbre de Lie donnée $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$, on a :*

3.11. $ad_x^{\mu*} = [d_\mu, i_x], \forall x \in \mathcal{G};$

3.12. $[d_\mu, ad_x^{\mu *}] = 0, \forall x \in \mathcal{G}$, *i.e* $d_\mu(ad_x^{\mu *}\xi) = ad_x^{\mu *}(d_\mu \xi), \forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi \in \mathcal{G}^*$;

3.13. $i_{d_\mu(ad_x^{\mu *}\xi)} = [ad_x^\mu, i_{d_\mu \xi}], \forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi \in \mathcal{G}^*$;

3.14. $d_\gamma(ad_\xi^{\gamma *}x) = ad_\xi^{\gamma *}(d_\gamma x) + ad_x^\mu(i_\xi \phi) - i_{ad_x^{\mu *}\xi}\phi, \forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi \in \mathcal{G}^*$;

3.15. $i_{\gamma(\xi,\eta)}\phi = ad_\xi^{\gamma *} i_\eta \phi - ad_\eta^{\gamma *} i_\xi \phi + d_\gamma(\phi(\xi,\eta)), \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*$.

Démonstration :
(3.11) Par définition, comme $\partial_\mu(x) = 0, \forall x \in \mathcal{G}$ pour cause de degré, on a:

$$ad_x^\mu Y = [x, Y]^\mu = -\partial_\mu(x \wedge Y) - x \wedge \partial_\mu Y = -[\partial_\mu, \varepsilon_x](Y), \forall Y \in \Lambda \mathcal{G}$$

i.e

$$ad_x^\mu = -[\partial_\mu, \varepsilon_x];$$

d'où par transpositition $ad_x^{\mu *} = [d_\mu, i_x], \forall x \in \mathcal{G}$;
(3.12) et (3.13) sont des conséquences directes de (3.11); (3.14) est une conséquence directe de la relation (3.9); (3.15) est une conséquence directe de la relation (3.10). Ce qui achève la démonstration du lemme. △

Lemme 3.2. *Pour une quasi-bigèbre de Lie donnée* $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$, *on a pour tout* $x \in \mathcal{G}$, *pour tous* $\xi, \eta \in \mathcal{G}^*$ *et pour tout* $Y = y_1 \wedge ... \wedge y_m \in \Lambda \mathcal{G}$*:*

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} ad^{\gamma *}_{ad^{\mu *}_{y_i}\xi} x \wedge \hat{Y}_i &= i_{d_\mu(\xi)}(d_\gamma(x) \wedge Y) - (i_{d_\mu(\xi)}(d_\gamma(x)))Y \\
&\quad -(d_\gamma(x)) \wedge i_{d_\mu(\xi)} Y; \\
\textstyle\sum_{i=1}^m (-1)^i (\phi(ad^{\mu *}_{y_i}\xi, \eta) \wedge \hat{Y}_i &= i_{d_\mu(\xi)}((i_\eta \phi) \wedge Y) - (i_{d_\mu(\xi)}(i_\eta \phi))Y \\
&\quad -(i_\eta \phi) \wedge i_{d_\mu(\xi)} Y,
\end{aligned}$$

où $\hat{Y}_i = y_1 \wedge ... \wedge \hat{y}_i \wedge ... \wedge y_m$ *pour* $1 \leq i \leq m$.

La démonstration du lemme relève d'un simple calcul. △
Dans ([2]), on a le résultat suivant :

Proposition 3.4. *Soit* $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ *une quasi-bigèbre de Lie. Alors les opérateurs* d_μ, ∂_μ *et* ∂_γ *satisfont les propriétés suivantes :*

3.16. $\partial_\gamma^2 + d_\mu i_\phi + i_\phi d_\mu - i_{\partial_\mu \phi} = 0$*;*

3.17. $\partial_\gamma i_\phi + i_\phi \partial_\gamma = 0$*;*

3.18. $\partial_\gamma i_x + i_x \partial_\gamma = -i_{\gamma(x)}$, $\forall x \in \mathcal{G}$.

On remarque bien que si $\phi = 0$, alors $\partial_\gamma^2 = 0$ et par transposition $d_\gamma^2 = 0$.

Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie telle que $\partial_\mu(\phi) \in Im\gamma$, i.e qu'il existe $x_0 \in \mathcal{G}$ tel que $\gamma(x_0) = \partial_\mu(\phi)$. Des exemples de telles structures sont fournies par les quasi-bigèbres de Lie exactes où

$$\gamma(x) = (\delta_\mu r)(x) = [x, r]^\mu = -[r, x]^\mu, \forall x \in \mathcal{G},$$

et

$$\phi = -\frac{1}{2}[r, r]^\mu,$$

pour un certain élément $r \in \Lambda^2\mathcal{G}$. Dans [2], on montre qu'une telle structure de quasi-bigèbre de Lie permet de définir une structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle ([2], [6]) sur $\Lambda\mathcal{G}^*$ en posant

$$\Delta = \partial_\gamma + i_{x_0}, \quad \delta = d_\mu, \quad \Phi = i_\phi.$$

Plus précisement on a ([2])

Théorème 3.2. *Les structures de quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ telles que $\partial_\mu(\phi) \in Im\gamma$ sont en correspondance bijective avec les structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\Lambda\mathcal{G}^*$.*

Soit $\xi^\mu \in \mathcal{G}^*$ le caractère adjoint de $\mathcal{G}$ et $x^\gamma \in \mathcal{G}$ définis respectivement par

$$< \xi^\mu, x >= tr(ad_x^\mu), \qquad \forall x \in \mathcal{G}$$

et

$$< x^\gamma, \xi >= tr(ad_\xi^\gamma), \qquad \forall \xi \in \mathcal{G}^*.$$

Rappelons que si $\xi^\mu = 0$, alors l'algèbre de Lie $(\mathcal{G}, \mu)$ est dite unimodulaire.
Par ailleurs, bien que $(\mathcal{G}^*, \gamma)$ ne soit pas une algèbre de Lie, pour simplicité, nous appelerons aussi x^γ le caractère adjoint de $\mathcal{G}^*$.
On a le résultat suivant :

Lemme 3.3. *Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie. Alors les éléments ξ^μ et x^γ satisfont les propriétés suivantes :*

3.19. $ad_x^{\mu *}\xi^\mu = 0, \forall x \in \mathcal{G}$, *ou de manière équivalente* $d_\mu(\xi^\mu) = 0$;

3.20. $< x^\gamma, \gamma(\xi, \eta) >=< \xi^\mu, \phi(\xi, \eta) > +2(i_{d_\mu(\xi)} i_\eta \phi) - 2(i_{d_\mu(\eta)} i_\xi \phi), \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*$, *ou de manière équivalente* $d_\gamma(x^\gamma) = -i_{\xi^\mu}\phi - 2\partial_\mu\phi$;

3.21. $< x^\gamma, ad_x^{\mu *}\xi >= - < \xi^\mu, ad_\xi^{\gamma *} x > +2(i_{d_\mu(\xi)} d_\gamma(x)), \forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi \in \mathcal{G}^*$.

Démonstration : Elle utilise essentiellement les définitions des différents opérateurs et les axiomes définissant la structure de quasi-bigèbre de Lie. La relation (3.19) est une évidence; la relation (3.20) suit de (3.7). La relation (3.21) est une conséquence de (3.8). $\triangle$

4 Représentation de $\mathcal{D} = \mathcal{G} \bowtie \mathcal{G}^*$ sur $\Lambda\mathcal{G}$

Dans cette section, on montre qu'il existe une structure de $\mathcal{D}$-module, ou de manière équivalente une représentation de $\mathcal{D}$, sur $\Lambda\mathcal{G}$, puis on montre que $\Lambda\mathcal{D}$ et $End(\Lambda\mathcal{G})$, comme $\mathcal{D}$-modules, sont isomorphes.
Nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.1. *Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie. L'application linéaire*

$$\Re : \mathcal{D} \to End(\Lambda\mathcal{G}) : x + \xi \to \Re_x + \Re_\xi$$

définie par

$$\Re_x(Y) = (d_\gamma x) \wedge Y + ad^\mu_x Y - \frac{1}{2} < \xi^\mu, x > Y$$

$$\Re_\xi(Y) = -i_{d_\mu \xi} Y + ad^{\gamma*}_\xi Y - (i_\xi \phi) \wedge Y + \frac{1}{2} < x^\gamma, \xi > Y$$

pour $x \in \mathcal{G}$, $\xi \in \mathcal{G}^*$ et $Y \in \Lambda\mathcal{G}$, est une représentation de $\mathcal{D}$ sur $\wedge\mathcal{G}$.

Démonstration : Pour montrer que $\Re$ est une représentation de $\mathcal{D}$ sur $\Lambda\mathcal{G}$, il suffit d'établir les relations suivantes :

$$\Re_{[x,y]_\mathcal{D}} = \Re_{\mu(x,y)} = [\Re_x, \Re_y], \forall x, y \in \mathcal{G};$$

$$\Re_{[x,\xi]_\mathcal{D}} = -\Re_{ad^{\gamma*}_\xi x} + \Re_{ad^{\mu*}_x \xi} = [\Re_x, \Re_\xi], \forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi \in \mathcal{G}^*;$$

$$\Re_{[\xi,\eta]_\mathcal{D}} = \Re_{\phi(\xi,\eta)} + \Re_{\gamma(\xi,\eta)} = [\Re_\xi, \Re_\eta], \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*.$$

Prouvons tout d'abord que $\Re_{\mu(x,y)} = [\Re_x, \Re_y], \forall x, y \in \mathcal{G}$; en effet, par définition, puis en utilisant la condition de 1-cocycle et la relation (3.19) du lemme 3.3, on a pour tout $Y \in \Lambda\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \Re_{\mu(x,y)}(Y) &= (d_\gamma \mu(x,y)) \wedge Y + ad^\mu_{\mu(x,y)} Y - \tfrac{1}{2} < \xi^\mu, \mu(x,y) > Y \\ &= [d_\gamma x, y]^\mu \wedge Y + [x, d_\gamma y]^\mu \wedge Y + [ad^\mu_x, ad^\mu_y](Y). \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} [\Re_x, \Re_y](Y) &= \Re_x(\Re_y(Y)) - \Re_y(\Re_x(Y)) \\ &= [x, (d_\gamma y) \wedge Y]^\mu + (d_\gamma x) \wedge ad^\mu_y Y - [y, (d_\gamma x) \wedge Y]^\mu \\ &\quad -(d_\gamma y) \wedge ad^\mu_x Y + [ad^\mu_x, ad^\mu_y](Y) \\ &= [(d_\gamma x), y]^\mu \wedge Y + [x, (d_\gamma y)]^\mu \wedge Y + [ad^\mu_x, ad^\mu_y](Y). \end{aligned}$$

D'où $\Re_{\mu(x,y)} = [\Re_x, \Re_y], \forall x, y \in \mathcal{G}$.
Prouvons à présent que $-\Re_{ad^{\gamma*}_\xi x} + \Re_{ad^{\mu*}_x \xi} = [\Re_x, \Re_\xi], \forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi \in \mathcal{G}^*$; en effet, par

définition, puis en utilisant la relation (3.14) du lemme 3.1 et la proposition 3.2, on a pour tout $Y \in \Lambda\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} -\Re_{ad_\xi^{\gamma *}x}(Y) + \Re_{ad_x^{\mu *}\xi}(Y) &= -(ad_\xi^{\gamma *}(d_\gamma x)) \wedge Y - (ad_x^\mu i_\xi \phi) \wedge Y \\ &\quad -[ad_x^\mu, i_{d_\mu \xi}](Y) + [ad_x^\mu, ad_\xi^{\gamma *}](Y) \\ &\quad + \textstyle\sum_i (-1)^{i+1} ad^{\gamma *}_{ad^{\mu *}_{y_i}\xi} x \wedge \hat{Y}_i + (i_{d_\mu(\xi)} d_\gamma(x)). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.2, on obtient

$$\begin{aligned} -\Re_{ad_\xi^{\gamma *}x}(Y) + \Re_{ad_x^{\mu *}\xi}(Y) &= -(ad_\xi^{\gamma *}(d_\gamma x)) \wedge Y - (ad_x^\mu i_\xi \phi) \wedge Y \\ &\quad -[ad_x^\mu, i_{d_\mu \xi}](Y) + [ad_x^\mu, ad_\xi^{\gamma *}](Y) \\ &\quad + i_{d_\mu \xi}((d_\gamma x) \wedge Y) - (d_\gamma x) \wedge i_{d_\mu \xi} Y. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} [\Re_x, \Re_\xi](Y) &= \Re_x(\Re_\xi(Y)) - \Re_\xi(\Re_x(Y)) \\ &= -(ad_\xi^{\gamma *}(d_\gamma x)) \wedge Y - (ad_x^\mu i_\xi \phi) \wedge Y \\ &\quad -[ad_x^\mu, i_{d_\mu \xi}](Y) + [ad_x^\mu, ad_\xi^{\gamma *}](Y) \\ &\quad + i_{d_\mu \xi}((d_\gamma x) \wedge Y) - (d_\gamma x) \wedge i_{d_\mu \xi} Y. \end{aligned}$$

Par comparaison, on trouve que $-\Re_{ad_\xi^{\gamma *}x} + \Re_{ad_x^{\mu *}\xi} = [\Re_x, \Re_\xi], \forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi \in \mathcal{G}^*$.
Montrons enfin que $\Re_{\phi(\xi,\eta)} + \Re_{\gamma(\xi,\eta)} = [\Re_\xi, \Re_\eta], \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*$; en effet, par définition et en utilisant la condition de 1-cocycle, la relation 3.20 du lemme 3.3 et la proposition 3.2, on a pour tout $Y \in \Lambda\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \Re_{\phi(\xi,\eta)}(Y) + \Re_{\gamma(\xi,\eta)}(Y) &= (d_\gamma(\phi(\xi,\eta))) \wedge Y - i_{[d_\mu \xi, \eta]^\gamma}(Y) - i_{[\xi, d_\mu \eta]^\gamma}(Y) \\ &\quad + [ad_\xi^{\gamma *}, ad_\eta^{\gamma *}](Y) - (i_{\gamma(\xi,\eta)}\phi) \wedge Y \\ &\quad + \textstyle\sum_{i=1}^m (-1)^i (\phi(ad_{y_i}^{\mu *}\xi, \eta) + \phi(\xi, ad_{y_i}^{\mu *}\eta)) \wedge \hat{Y}_i. \end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant (3.15) et la proposition 2.2 adaptée à $[,]^\gamma$, on a

$$\begin{aligned} [\Re_\xi, \Re_\eta](Y) &= (d_\gamma \phi(\xi,\eta)) \wedge Y - i_{[d_\mu \xi, \eta]^\gamma}(Y) - i_{[\xi, d_\mu(\eta)]^\gamma}(Y) \\ &\quad + [ad_\xi^{\gamma *}, ad_\eta^{\gamma *}](Y) - (i_{\gamma(\xi,\eta)}\phi) \wedge Y \\ &\quad + i_{d_\mu \xi}((i_\eta \phi) \wedge Y) - (i_\eta \phi) \wedge i_{d_\mu \xi} Y \\ &\quad - i_{d_\mu \eta}((i_\xi \phi) \wedge Y) + (i_\xi \phi) \wedge i_{d_\mu \eta} Y. \end{aligned}$$

En comparant les deux expressions, le lemme 3.2 nous permet de conclure que $\Re_{\phi(\xi,\eta)} + \Re_{\gamma(\xi,\eta)} = [\Re_\xi, \Re_\eta], \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*$.
Ce qui achève la démonstration du théorème. $\triangle$

Remarque 4.1. La représentation ci-dessus décrite ne préserve pas la graduation dans $\wedge\mathcal{G}$.

Corollaire 4.1. *L'application suivante*

$$\Gamma : x + \xi \in \mathcal{D} \to \Gamma_{(x+\xi)} : End(\Lambda\mathcal{G}) \to End(\Lambda\mathcal{G})$$

définie par

$$\Gamma_{(x+\xi)}(T) = \Re_{(x+\xi)} T - T\Re_{(x+\xi)}$$

pour $x \in \mathcal{G}$, $\xi \in \mathcal{G}^*$ *et* $T \in End(\Lambda\mathcal{G})$, *est une représentation de* $\mathcal{D}$ *sur* $End(\Lambda\mathcal{G})$.

Pour définir l'isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules entre $\Lambda\mathcal{D}$ et $End(\Lambda\mathcal{G})$, nous avons besoin d'introduire certains éléments de la théorie des algèbres de Clifford et leurs relations avec les algèbres extérieures et les algèbres de Lie munies d'un produit scalaire invariant; pour cela nous adopterons les définitions et constructions de ([10], [13]). Pour plus de détails sur les algèbres de Clifford, voir par exemple ([7]).

Définition 4.1. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire q. L'algèbre de Clifford associée à q, notée $C(V) = C(V, q)$, est l'algèbre engendrée par 1 et les éléments de V avec les relations

$$uv + vu = 2q(u, v)1, \qquad u, v \in V.$$

Remarquons que l'algèbre de Clifford $C(V)$ est $\mathbb{Z}_2$-graduée ([10]) :

$$C(V) = C_0(V) + C_1(V),$$

où $C_0(V)$ (resp.$C_1(V)$) consiste en les éléments qui peuvent s'écrire comme une somme finie de produits de nombres pairs (resp. impairs) d'éléments de V. Pour $v \in V$, définissons l'application

$$T_v : \Lambda V \to \Lambda V : T_v = \varepsilon_v + i_v^q,$$

où $\varepsilon_v(U) = v \wedge U$, $\forall U \in \Lambda V$ et

$$i_v^q(v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k) = \sum_i (-1)^{i+1} q(v, v_i) v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge \hat{v}_i \wedge ... \wedge v_k.$$

Alors T ainsi définie est une application de Clifford, i.e

$$T_u T_v + T_v T_u = 2q(u, v) Id,$$

pour tous $u, v \in V$. Ainsi elle s'étend pour donner une structure de $C(V)$-module à gauche sur ΛV. L'application

$$\psi^{-1} : C(V) \to \Lambda V : a \to T_a(1)$$

est appelée **application symbole**. Elle est inversible, et son inverse est l'application antisymétrisation totale ([10], [13])

$$\psi : \Lambda V \to C(V) : \psi(v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k) = \frac{1}{k!} \sum_s sign(s) v_{s(1)} v_{s(2)} ... v_{s(k)},$$

où la sommation est faite sur le groupe symétrique avec k éléments. C'est une application de $C(V)$-module.
Pour $u, v \in V$, définissons le crochet ([10])

$$\{u, v\} = 2q(u, v)1.$$

Ce crochet peut s'étendre à ΛV en un "super-crochet de Poisson" en accord avec la super-commutativité et la règle super-Leibniz. Il satisfait l'identité super-Jacobi. Le crochet de Poisson ainsi défini et le produit extérieur font de ΛV une super-algèbre de Poisson ([10]).
Pour tout $v \in V$, l'opération

$$\{v, .\} : \Lambda V \to \Lambda V$$

est une dérivation de degré -1. En fait, elle est donnée par

$$\{v, U\} = 2 i_v^q U.$$

Pour tout $\omega \in \wedge^2 V$, l'opération

$$\{\omega, .\} : \Lambda V \to \Lambda V$$

est une dérivation de degré 0.
Soit $[,]_c$ le super-commutateur dans $C(V)$ ([10]):

$$[a, b]_c = ab - (-1)^{|a||b|} ba, a, b \in C(V).$$

Pour tout $\omega \in V \oplus \Lambda^2 V$ et tout $U \in \Lambda V$, on a

$$[\psi(\omega), \psi(U)]_c = \psi\{\omega, U\}.$$

Cette relation se démontre par récurrence sur le degré de U en utilisant le fait que ψ est une application de $C(V)$-module, plus précisement, pour tous $u \in V$ et $U \in \Lambda V$,

$$\psi(u \wedge U + i_u^q U) = u\psi(U).$$

Supposons maintenant que V est muni d'un crochet de Lie $[,]$ pour lequel q est ad-invariant. Supposons aussi que q est non dégénéré. Définissons

$$d_q : V \to \Lambda^2 V : q(d_q v, u_1 \wedge u_2) = -q(v, [u_1, u_2]).$$

Le résultat suivant est dû à Kostant et la démonstration est faite dans ([13]).

Proposition 4.1. *L'application $\frac{1}{2}d_q$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie, où $\Lambda^2 V$ a la structure venant du super-commutateur $[,]_c$ sur $C(V)$. En faisant agir $v \in V$ sur $C(V)$ par*

$$v.a = \frac{1}{2}[\psi(d_q v), a]_c, a \in C(V),$$

on fait de $C(V)$ un V-module d'algèbre de Lie. Avec ΛV comme V-module d'algèbre de Lie par l'action adjointe, l'application

$$\psi : \Lambda V \to C(V)$$

est une application de V-module d'algèbre de Lie.

Remarque 4.2. L'application $d_q : V \to \Lambda^2 V$ peut être regardée comme l'action adjointe pour V comme suit : si chaque élément dans $V \otimes V$ est identifié avec un élément dans $End(V)$ par

$$v_1 \otimes v_2 : v \to q(v_2, v)v_1,$$

alors $d_q v \in V \wedge V \subset V \otimes V$ donne $ad_v \in End(V)$ ([10]). Si S est un module pour l'algèbre de Clifford $C(V)$, il peut être regardé comme un module d'algèbre de Lie pour $C(V)$ avec le crochet super-commutateur $[.,.]_c$. En faisant agir $v \in V$ sur S par $\frac{1}{2}\psi(d_q v)$, on sait de la proposition précédente que cela définit une représentation de V sur S.

Remarque 4.3. L'opérateur $d_q : V \to \Lambda^2 V$ peut naturellement être étendu à

$$d_q : \Lambda^k V \to \Lambda^{k+1} V$$

pour tout k en l'exigeant d'être une dérivation de degré 0. Ceci n'est rien d'autre que l'opérateur cobord de Chevalley-Eilenberg pour l'algèbre de Lie V (à coefficients triviaux) après avoir identifié V avec V^* en utilisant q.

Soit W un espace vectoriel et W^* son espace vecoriel dual. Soit $V = W \oplus W^*$ muni du produit scalaire canonique

$$\langle x + \xi, y + \eta \rangle = \langle x, \eta \rangle + \langle y, \xi \rangle, \quad x, y \in W, \quad \xi, \eta \in W^*.$$

Pour $v \in V$, l'application contraction

$$\iota_v : \Lambda^{k+1} V \to \Lambda^k V$$

est définie en utilisant $\langle , \rangle$:

$$\iota_v(v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \langle v, v_i \rangle v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge \check{v}_i \wedge ... \wedge v_k$$

Considérons l'algèbre de Clifford $C(V)$ associée au produit scalaire $q = \frac{1}{2}\langle , \rangle$. Les relations qui lient les éléments de V sont alors :

$$xy + yx = 0$$

$$\xi\eta + \eta\xi = 0$$

$$\xi x + x\xi = \langle x, \xi\rangle,$$

où, $x, y \in W$ et $\xi, \eta \in W^*$. Il est bien connu que l'algèbre de Clifford $C(V)$ est isomorphe à l'algèbre des matrices $End(\Lambda W)$. En fait, si $x \in W$ et $\xi \in W^*$, posons

$$s_x : \Lambda W \to \Lambda W : Y \mapsto x \wedge Y$$

$$s_\xi : \Lambda W \to \Lambda W : Y \wedge \mapsto \iota_\xi Y.$$

Ces opérateurs satisfont les relations définissant l'algébre de Clifford $C(V)$. Donc, ils peuvent être étendus en un homomorphisme d'algèbres

$$s : C(V) \to End(\Lambda W).$$

En fait, c'est un isomorphisme d'algèbres. De cette manière, ΛW devient un $C(V)$-module. Il est appelé le "**module spinoriel**" de $C(V)$ et les éléments de ΛW sont appélés des **spineurs**. La représentation s prend une forme plus simple si nous utilisons pour l'algèbre de Clifford $C(V)$ l'opération de mise en ordre, i.e en déplaçant les éléments de W^* à droite des éléments de W. En utilisant la relation $\xi x + x\xi = \langle x, \xi\rangle$, nous pouvons écrire tous les éléments de $C(V)$ comme somme finie d'éléments de la forme

$$x_1 x_2 ... x_k \xi_1 \xi_2 ... \xi_l$$

avec $x_i \in W, i = 1, ..., k$ et $\xi_j \in W^*, j = 1, ..., l$.
Définissons l'application

$$\begin{array}{rcl} \omega : C(V) & \longrightarrow & \Lambda W \otimes \Lambda W^* \\ x_1 x_2 ... x_k \xi_1 \xi_2 ... \xi_l & \longmapsto & x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_k \otimes \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge ... \wedge \xi_l. \end{array}$$

Appelons-la **application de mise en ordre de Wick**; (en anglais **"Wick ordering map"** dans [10], [13]). C'est un isomorphisme d'espaces vectoriels bien défini.
Maintenant, l'espace vectoriel $\Lambda W \otimes \Lambda W^*$ peut être identifié à l'espace des "opérateurs différentiels" sur ΛW par :

$$D : \Lambda W \otimes \Lambda W^* \to End(\Lambda W) : D_{X \wedge A}(Y) := X \wedge \iota_{\hat{A}} Y,$$

où, $\hat{A} = \xi_l \wedge \xi_{l-1} \wedge ... \wedge \xi_1$ si $A = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge ... \wedge \xi_l$.
En utilisant l'application de mise en ordre de Wick ω et l'application D, la représentation s s'écrit simplement

$$s = D \circ \omega.$$

Définition 4.2. Soit l'application

$$Q = s \circ \psi = D \circ \omega \circ \psi : \Lambda V \to End(\Lambda W).$$

Q est appelée **l'application quantisation**, (the quantization map, en anglais, [10], [13]).

Maintenant, regardons l'application antisymétrisation totale $\psi : \Lambda V \to C(V)$. Notons qu'à l'intérieur de V, nous pouvons faire passer les éléments de W^* à droite de ceux de W en utilisant l'anticommutativité du produit extérieur (ceci peut être regardé comme une application de mise en ordre de Wick pour le produit extérieur sur ΛV. Elle est plus simple que l'application de mise en ordre de Wick pour l'algèbre de Clifford $C(V)$). Autrement dit, on peut identifier ΛV à $\Lambda W \otimes \Lambda W^*$ par

$$x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_k \wedge \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge ... \wedge \xi_l \to x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_k \otimes \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge ... \wedge \xi_l.$$

L'application $\omega \circ \psi$ devient maintenant

$$\omega \circ \psi : \Lambda V \to \Lambda V.$$

Donnons à présent une description de $\omega \circ \psi$ en utilisant l'élément $r \in \Lambda^2 V$ défini par

$$r = \sum_i^n \frac{1}{2} e_i \wedge \xi^i,$$

où $\{e_i\}_1^n$ est une base de W et $\{\xi^i\}_1^n$ sa base duale pour W^*. Soit

$$exp_\wedge r = 1 + r + \frac{1}{2!} r \wedge r + \frac{1}{3!} r \wedge r + ...,$$

l'exponentielle de $r \in \Lambda^2 V$ par rapport au produit extérieur.
On a le résultat suivant dû à J. Hua Lu ([13]) :.

Proposition 4.2.

$$\omega \circ \psi = \iota_{exp_\wedge r} = exp(\iota_r)$$

Démonstration : Puisque ψ est un morphisme de $C(V)$-modules, nous avons

$$(\omega \circ \psi)(x \wedge U + \frac{1}{2} \iota_x U) = x \wedge (\omega \circ \psi)(U)$$

pour tout $x \in W$ et tout $U \in \Lambda V$. Ecrivons $U = X \wedge A$ avec $X \in \Lambda W$ et $A \in \Lambda W^*$. Alors,

$$(\omega \circ \psi)(x \wedge X \wedge A) = -\frac{1}{2}(-1)^{|X|}(\omega \circ \psi)(X \wedge \iota_x A) + x \wedge (\omega \circ \psi)(X \wedge A),$$

i.e
$$(\omega \circ \psi)\varepsilon_x = (\omega \circ \psi)\varepsilon_x - \frac{1}{2}\iota_x(\omega \circ \psi).$$
Cette formule est une formule de récurrence qui nous permet de réduire le calcul de $\omega \circ \psi$ sur $\Lambda^{k+1}W \wedge \Lambda^k W^*$ à celui sur $\Lambda^k W \wedge \Lambda^k W^*$ et donc éventuellement à celui sur $\Lambda^k W^*$. Evidemment, $\omega \circ \psi$ agit comme l'identité sur $\Lambda^k W^*$. D'autre part, notons que l'application $\iota_{exp_\wedge r}$ agit aussi comme l'identité sur $\Lambda^k W^*$. Donc pour prouver l'identité des deux opérateurs, il suffit de montrer que $\iota_{exp_\wedge r}$ satisfait la même relation de récurrence. Maintenant, pour $X \in \Lambda W$ et $A \in \Lambda W^*$, on a
$$\iota_r(X \wedge A) = \frac{1}{2}(-1)^{|X|}\sum_i \iota_\xi(X) \wedge \iota_{e_i}(A).$$
En utilisant cette formule, pour $x \in W$, on trouve $\iota_r\varepsilon_x = \varepsilon_x\iota_r - \frac{1}{2}\iota_x$. Puisque $\iota_r\varepsilon_x = \varepsilon_x\iota_r$, nous obtenons par récurrence pour tout $n \geq 1$,
$$\iota_r^n\varepsilon_x = \varepsilon_x\iota_r^n - \frac{1}{2}\iota_x\iota_r^{n-1}.$$
Donc,
$$(exp(\iota_r))\varepsilon_x = \varepsilon_x exp(\iota_r) - \frac{1}{2}\iota_x exp(\iota_r)$$
Ce qui est la formule de récurrence recherchée pour $exp(\iota_r)$. D'où
$$\omega \circ \psi = \iota_{exp_\wedge r}.$$
Cette formule nous sera très utile dans la suite.
Supposons maintenant que W est un espace vectoriel de dimension finie tel que sur $V = W \oplus W^*$, il existe un crochet de Lie $[.,.]$ pour lequel $\langle , \rangle$ est ad-invariant. En prenant $q = \frac{1}{2}\langle , \rangle$ et $C(V) = C(V, q)$ l'algèbre de Clifford correspondante, soit
$$d : V \to \Lambda^2 V : \langle dv, u_1 \wedge u_2\rangle = -\langle v, [u_1, u_2]\rangle.$$
Ici, $d = \frac{1}{2}d_q$. Alors, l'application
$$\psi \circ d : (V, [.,.]) \to \Lambda^2 V \hookrightarrow (C(V), [,]_c)$$
est un homomorphisme d'algèbres de Lie. En la composant avec la représentation s de $C(V)$ sur ΛW, on obtient une représentation ρ de V sur ΛW :
$$\rho := s \circ \psi \circ d : V \to End(\Lambda W).$$
Nous appelons ρ le "**spin de la représentation adjointe** de V"(spin of the adjoint representation, en anglais). Pour plus de détails, voir ([10], [13]). En utilisant la proposition 4.2, la représentation ρ s'écrit explicitement
$$\rho = D \circ i_{exp_\wedge \mathbf{r}} \circ d.$$

Définissons sur $End(\wedge W)$ une structure de V-module d'algèbre de Lie en posant

$$v.T = \rho(v)T - T\rho(v), \quad T \in End(\wedge W).$$

Alors, on sait de la proposition 4.1 que l'application composée

$$s \circ \psi : \wedge V \xrightarrow{\psi} C(V) \xrightarrow{s} End(\Lambda W)$$

est un isomorphisme de V-modules d'algébre de Lie, où V agit sur ΛV par l'action adjointe. D'après la proposition 4.2, on sait que

$$s \circ \psi = D \circ \omega \circ \psi = D \circ \iota_{exp_\wedge r}.$$

On a ainsi prouvé le résultat suivant ([13]):

Proposition 4.3. *L'application*

$$D \circ i_{exp_\wedge r} : \wedge V \to End(\wedge W)$$

est un isomorphisme de V-modules d'algèbre de Lie, où V agit sur $\wedge V$ par l'action adjointe et $End(\wedge W)$ est muni de la structure de V-module décrite ci-dessus.

Soit à présent $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie et $\mathcal{D}$ son algèbre de Lie double. On a le résultat suivant :.

Théorème 4.2. *Pour $U \in \Lambda\mathcal{D}$, posons*

$$i_{exp_\wedge r} U = \sum_j X_j \otimes A_j \in \Lambda\mathcal{D} \cong \Lambda\mathcal{G} \otimes \Lambda\mathcal{G}^*$$

où $X_j \in \Lambda\mathcal{G}$ et $A_j \in \Lambda\mathcal{G}^*$. Définissons

$$Q(U) \in End(\Lambda\mathcal{G}) : Q(U)(Y) = \sum_j X_j \wedge i_{\hat{A}_j} Y.$$

Alors l'application

$$Q : \Lambda\mathcal{D} \to End(\Lambda\mathcal{G})$$

est un isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules, où $\mathcal{D}$ agit sur $\Lambda\mathcal{D}$ par l'action adjointe et sur $End(\Lambda\mathcal{G})$ par la représentation Γ.

Démonstration : Il s'agit de montrer tout d'abord que $\forall x + \xi \in \mathcal{D}$, on a

$$\Gamma_{(x+\xi)} \circ Q = Q \circ ad_{(x+\xi)},$$

et d'établir ensuite que Q est un isomorphisme. Plus précisement, $\forall x + \xi \in \mathcal{D}$, $\forall U \in \Lambda\mathcal{D}$ et $\forall Y \in \Lambda\mathcal{G}$, on doit avoir

$$(\Gamma_{(x+\xi)}(Q(U)))(Y) = (Q(ad_{(x+\xi)}U))(Y).$$

En effet, $\forall x \in \mathcal{G}$, $\forall U = X \in \Lambda\mathcal{G}$ et $\forall Y \in \Lambda\mathcal{G}$, on a par définition de Q, $Q(X))(Y) = X \wedge Y$; d'où

$$\begin{aligned}
\Gamma_x(Q(X)))(Y) &= \Re_x(Q(X)(Y)) - Q(X)(\Re_x(Y)) \\
&= d_\gamma(x) \wedge X \wedge Y + ad^\mu_x(X \wedge Y) - \tfrac{1}{2} < \xi^\mu, x > (X \wedge Y) \\
&\quad -X \wedge d_\gamma(x) \wedge Y - X \wedge (ad^\mu_x Y) + \tfrac{1}{2} < \xi^\mu, x > (X \wedge Y) \\
&= (ad_x X) \wedge Y = Q(ad_x X)(Y).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la relation pour $x \in \mathcal{G}$ et $U = X \in \Lambda\mathcal{G}$.
Prouvons la relation pour $\xi \in \mathcal{G}^*$ et $U = X \in \Lambda\mathcal{G}$. En effet, $\forall Y \in \Lambda\mathcal{G}$

$$\begin{aligned}
\Gamma_\xi(Q(X))(Y) &= \Re_\xi(Q(X)(Y)) - Q(X)(\Re_\xi(Y)) \\
&= -i_{d_\mu(\xi)}(X \wedge Y) + X \wedge (i_{d_\mu(\xi)} Y) + (ad^{\gamma^*}_\xi X) \wedge Y.
\end{aligned}$$

Pour calculer $Q(ad_\xi X)(Y)$, $\mathcal{G}$ étant supposée de dimension finie, on peut considérer X et Y comme des éléments décomposables de $\wedge\mathcal{G}$, i.e $X = x_1 \wedge ... \wedge x_m$ et $Y = y_1 \wedge ... \wedge y_n$; par définition de $[,]_\mathcal{D}$

$$\begin{aligned}
ad_\xi X &= ad^{\gamma*}_\xi X - \textstyle\sum_{k=1}^m x_1 \wedge ... \wedge (ad^{\mu^*}_{x_k}\xi) \wedge ... \wedge x_m \\
&= ad^{\gamma*}_\xi X - \textstyle\sum_{k=1}^m (-1)^{n-k} \hat{X}_k \wedge (ad^{\mu^*}_{x_k}\xi),
\end{aligned}$$

où $\hat{X}_k = x_1 \wedge ... \wedge \hat{x_k} \wedge ... \wedge x_m$. Ce qui nous permet d'avoir

$$\begin{aligned}
i_\mathbf{r}(ad_\xi X) &= -\tfrac{1}{2}(-1)^{m-1} \textstyle\sum_{k=1}^m \sum_i (-1)^{m-k} i_{\xi^i}(\hat{X}_k) \wedge i_{e_i}(ad^{\mu^*}_{x_k}\xi) \\
&= -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{k=1}^m \sum_i \sum_{l=1}^m (-1)^{k+l} (i_{\xi^i} x_l) \hat{X}_{kl} \wedge (i_{e_i}(ad^{\mu^*}_{x_k}\xi)) \\
&= -\textstyle\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m (-1)^{k+l} (i_{d_\mu\xi}(x_k \wedge x_l)) \hat{X}_{kl} = -i_{d_\mu\xi} X
\end{aligned}$$

où $\hat{X}_{kl} = x_1 \wedge ... \wedge \hat{x}_k \wedge ... \wedge \hat{x}_l \wedge ... \wedge x_m$. Ainsi

$$i_{exp_\wedge \mathbf{r}}(ad_\xi X) = ad_\xi X + i_\mathbf{r}(ad_\xi X) = ad^{\gamma*}_\xi X - \sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \hat{X}_k \wedge (ad^{\mu^*}_{x_k}\xi) - i_{d_\mu\xi} X.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
Q(ad_\xi(X))(Y) &= (ad^{\gamma*}_\xi X) \wedge Y - (i_{d_\mu\xi} X) \wedge Y + \textstyle\sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \hat{X}_k \wedge (i_{ad^{\mu^*}_{x_k}\xi} Y) \\
&= (ad^{\gamma*}_\xi X) \wedge Y - (i_{d_\mu\xi} X) \wedge Y \\
&\quad + \textstyle\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n (-1)^{m-k-l} (i_{d_\mu\xi}(x_k \wedge y_l)) \hat{X}_k \wedge \hat{Y}_l.
\end{aligned}$$

Mais

$$i_{d_\mu\xi}(X\wedge Y)=(i_{d_\mu\xi}X)\wedge Y+X\wedge(i_{d_\mu\xi}X)-\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}(-1)^{m-k-l}(i_{d_\mu\xi}(x_k\wedge y_l))\hat{X}_k\wedge\hat{Y}_l.$$

En définitive, on trouve

$$Q(ad_\xi X)(Y)=-i_{d_\mu(\xi)}(X\wedge Y)+X\wedge(i_{d_\mu(\xi)}Y)+(ad_\xi^{\gamma^*}X)\wedge Y.$$

La relation est donc prouvée pour tout $x+\xi\in\mathcal{D}$, $\forall U=X\in\Lambda\mathcal{G}$ et $\forall Y\in\Lambda\mathcal{G}$. Pour tout $x\in\mathcal{G}$, $\forall U=A\in\Lambda\mathcal{G}^*$ et $\forall Y\in\Lambda\mathcal{G}$, on a par définition de Q

$$Q(A)(Y)=i_{\hat{A}}Y$$

et

$$\begin{aligned}\Gamma_x(Q(A))(Y) &= \Re_x(Q(A)(Y))-Q(A)(\Re_x(Y))\\ &= -i_{\hat{A}}(d_\gamma(x)\wedge Y)+d_\gamma(x)\wedge i_{\hat{A}}Y+[ad_x^\mu,i_{\hat{A}}](Y).\end{aligned}$$

Calculons $Q(ad_xA)(Y)$; pour cela supposons que $A=\xi_1\wedge...\wedge\xi_m$ avec $m\leq|Y|$. Par définition de $[,]_\mathcal{D}$

$$ad_xA=\sum_{k=1}^{m}(-1)^k(ad_{\xi_k}^{\gamma^*}x)\wedge\hat{A}_k+ad_x^{\mu*}A=\sum_{k=1}^{m}(-1)^k(i_{\xi_k}d_\gamma(x))\wedge\hat{A}_k+ad_x^{\mu*}A$$

d'où

$$i_{exp_\wedge\mathbf{r}}(ad_xA)=ad_xA+i_\mathbf{r}(ad_xA)=\sum_{k=1}^{m}(-1)^k(i_{\xi_k}d_\gamma(x))\wedge\hat{A}_k+ad_x^{\mu*}A+i_{d_\gamma(x)}A.$$

Ainsi, par définition de Q

$$Q(ad_xA)(Y)=i_{ad_x^{\mu*}\hat{A}}Y+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k(i_{\xi_k}d_\gamma(x))\wedge i_{\hat{A}_k}Y+i_{i_{d_\gamma(x)}\hat{A}}Y.$$

Mais

$$i_{ad_x^{\mu*}\hat{A}}Y=[ad_x^\mu,i_{\hat{A}}](Y),\quad i_{i_{d_\gamma(x)}\hat{A}}Y=\sum_{k,l=1}^{m}(-1)^{k+l}(i_{\xi_l}i_{\xi_k}d_\gamma(x))i_{\hat{A}_{kl}}Y$$

et

$$\begin{aligned}i_{\hat{A}}(d_\gamma(x)\wedge Y) &= -\textstyle\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}(-1)^{k+l}(i_{\xi_l}i_{\xi_k}d_\gamma(x))i_{\hat{A}_{kl}}Y\\ &\quad+\textstyle\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}(i_{\xi_k}d_\gamma(x))i_{\hat{A}_k}Y+d_\gamma(x)\wedge i_{\hat{A}}Y.\end{aligned}$$

En définitive

$$Q(ad_xA)(Y)=-i_{\hat{A}}(d_\gamma(x)\wedge Y)+d_\gamma(x)\wedge i_{\hat{A}}Y+[ad_x^\mu,i_{\hat{A}}](Y).$$

D'où

$$\Gamma_x(Q(A))(Y) = Q(ad_x A)(Y), \quad \forall x \in \mathcal{G}, \forall U = A \in \wedge\mathcal{G}^*, \forall Y \in \Lambda\mathcal{G}.$$

Pour tout $\xi \in \mathcal{G}^*$, $\forall U = A \in \Lambda\mathcal{G}^*$ et $\forall Y \in \Lambda\mathcal{G}$, on a par définition de Q

$$Q(A)(Y) = i_{\hat{A}}Y$$

et

$$\begin{aligned}\Gamma_\xi(Q(A))(Y) &= \Re_\xi(Q(A)(Y)) - Q(A)(\Re_\xi(Y)) \\ &= [ad_\xi^{\gamma*}, i_{\hat{A}}](Y) - (i_\xi\phi) \wedge i_{\hat{A}}Y + i_{\hat{A}}((i_\xi\phi) \wedge Y) \\ &= [ad_\xi^{\gamma*}, i_{\hat{A}}](Y) + [i_{\hat{A}}, \varepsilon_{i_\xi\phi}](Y).\end{aligned}$$

En supposant que A est un élément décomposable de $\Lambda\mathcal{G}^*$, i.e $A = \xi_1 \wedge ... \wedge \xi_m$, on a par définition de $[,]_{\mathcal{D}}$

$$ad_\xi A = ad_\xi^\gamma A + \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\phi(\xi, \xi_k) \wedge \hat{A}_k.$$

Par un calcul, on trouve

$$Q(ad_\xi A)(Y) = [ad_\xi^{\gamma*}, i_{\hat{A}}](Y) + [i_{\hat{A}}, \varepsilon_{i_\xi\phi}](Y).$$

Par conséquent

$$\Gamma_{(x+\xi)}(Q(A))(Y) = Q(ad_{(x+\xi)}A)(Y), \quad \forall x + \xi \in \mathcal{D}, \forall U = A \in \wedge\mathcal{G}^*, \forall Y \in \wedge\mathcal{G}.$$

Pour une démonstration complète du théorème dans le cas général, nous allons nous servir de la proposition 4.3 en posant $V = \mathcal{D}$, $W = \mathcal{G}$ et $r = \mathbf{r}$, où $\mathbf{r}$ est l'élément définissant la structure canonique de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{D}$, le produit scalaire invariant étant le produit scalaire canonique sur $\mathcal{D}$. Dans ces conditions, on montre aisement par un calcul direct que la représentation $\rho = D \circ i_{exp_\wedge \mathbf{r}} \circ d$ de $V = \mathcal{D}$ dans $\Lambda W = \Lambda\mathcal{G}$, i.e le spin de la représentation adjointe de $\mathcal{D}$, coïncide avec la représentation $\Re$ décrite dans le théorème 4.1 En effet par définition de d et en utilisant la définition de $[,]_{\mathcal{D}}$ et du produit scalaire canonique sur $\mathcal{D}$, on a pour tous $x \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}dx &= -\textstyle\sum_{i<j} < x, [\xi^i, \xi^j]_{\mathcal{D}} > e_i \wedge e_j - \sum_{i,j} < x, [\xi^i, e_j]_{\mathcal{D}} > e_i \wedge \xi^j \\ &= d_\gamma x + \textstyle\sum_j (ad_x^\mu e_j) \wedge \xi^j.\end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'avoir pour tous $x \in \mathcal{G}$ et $Y \in \Lambda\mathcal{G}$

$$i_{exp_\wedge \mathbf{r}}dx = dx + i_{\mathbf{r}}(dx) = d_\gamma x + \sum_j (ad_x^\mu e_j) \wedge \xi^j - \frac{1}{2} < \xi^\mu, x > .$$

D'où, en utilisant la définition de D, on trouve pour tous $x \in \mathcal{G}$ et $Y \in \Lambda\mathcal{G}$

$$\rho(x)(Y) = D_{i_{exp_\wedge \mathbf{r}}dx}(Y) = (d_\gamma x) \wedge Y + ad^\mu_x Y - \frac{1}{2} < \xi^\mu, x > Y = \Re_x(Y);$$

i.e $\rho(x) = \Re_x$.
De même, pour tous $\xi \in \mathcal{G}^*$, on a

$$d\xi = d_\mu \xi - i_\xi \phi + \sum_j ad^{\gamma *}_\xi e_j \wedge \xi^j.$$

$$i_{exp_\wedge \mathbf{r}} d\xi = d\xi + i_{\mathbf{r}}(d\xi) = d_\mu \xi - i_\xi \phi + \sum_j ad^{\gamma *}_\xi e_j \wedge \xi^j + \frac{1}{2} < x^\gamma, \xi > .$$

En appliquant la définition de D, on trouve pour tous $\xi \in \mathcal{G}$ et $Y \in \Lambda\mathcal{G}^*$

$$\begin{aligned} \rho(\xi)(Y) &= D_{i_{exp_\wedge \mathbf{r}}d\xi}(Y) \\ &= -i_{d_\mu \xi} Y - (i_\xi \phi) \wedge Y + \textstyle\sum_j ad^{\gamma *}_\xi Y + \frac{1}{2} < x^\gamma, \xi > Y = \Re_\xi(Y); \end{aligned}$$

i.e $\rho(\xi) = \Re_\xi$.
Par conséquent, $\rho = \Re$. D'après la proposition 4.3, l'application

$$D \circ i_{exp_\wedge \mathbf{r}} : \Lambda\mathcal{G} \otimes \Lambda\mathcal{G}^* \to End(\Lambda\mathcal{G})$$

est un isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules d'algèbre de Lie. Pour conclure la démonstration du théorème, il suffit de remarquer que $Q = D \circ i_{exp_\wedge \mathbf{r}}$. $\triangle$

Remarque 4.4. Le résultat que nous venons d'établir a été énoncé et démontré par J. Hua Lu ([13]) pour les bigèbres de Lie. Par ailleurs, les conditions d'application de la proposition 4.3 ne tiennent pas compte du fait que $\mathcal{G}$ soit ou non une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{D}$; par conséquent, elle peut s'appliquer en général à une proto-bigèbre de Lie ([8]), la seule donnée qui change dans ce cas est l'expression de la représentation $\Re$ qui généraliserait les expressions dans le cas des bigèbres de Lie ([13]) et dans le cas des quasi-bigèbres de Lie dans le présent travail.

Plus précisement, on a le résultat suivant

Théorème 4.3. *Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi, \psi)$ une proto-bigèbre de Lie. L'application linéaire*

$$\Re : \mathcal{D} \to End(\Lambda\mathcal{G}) : x + \xi \to \Re_x + \Re_\xi$$

définie par

$$\Re_x(Y) = (d_\gamma x) \wedge Y + ad^\mu_x Y + i_{i_x \psi} Y - \frac{1}{2} < \xi^\mu, x > Y$$

$$\Re_\xi(Y) = -i_{d_\mu \xi} Y + ad^{\gamma *}_\xi Y - (i_\xi \phi) \wedge Y + \frac{1}{2} < x^\gamma, \xi > Y$$

pour $x \in \mathcal{G}$, $\xi \in \mathcal{G}^*$ et $Y \in \Lambda\mathcal{G}$, est une représentation de $\mathcal{D}$ sur $\Lambda\mathcal{G}$.

Démonstration : Il suffit de calculer directement les expressions de $\Re_x(Y) = (D \circ i_{exp_\wedge \mathbf{r}} \circ d)(x)(Y)$ et de $\Re_\xi(Y) = (D \circ i_{exp_\wedge \mathbf{r}} \circ d)(\xi)(Y)$, pour $x \in \mathcal{G}$, $\xi \in \mathcal{G}^*$ et $Y \in \Lambda\mathcal{G}$, en utilisant la structure d'algèbre de Lie de $\mathcal{D}$ ([8]) définie par

$$[x, y]_\mathcal{D} = \mu(x, y) + \psi(x, y),$$

$$[x, \xi]_\mathcal{D} = -ad_\xi^{\gamma*} x + ad_x^{\mu*} \xi,$$

$$[\xi, \eta]_\mathcal{D} = \phi(\xi, \eta) + \gamma(\xi, \eta),$$

où $< ad_x^{\mu*}\xi, y >= - < \xi, \mu(x, y) >$, $< ad_\xi^{\gamma*} x, \eta >= - < x, \gamma(\xi, \eta) >$, $\phi(\xi, \eta) = i_{\xi\wedge\eta}\phi$ et $\psi(x, y) = i_{x\wedge y}\psi$, pour tous $x, y \in \mathcal{G}, \xi, \eta \in \mathcal{G}^*$.
En effet, par définition de d, on a pour tous $x \in \mathcal{G}$:

$$dx = d_\gamma x + \sum_j (ad_x^\mu e_j) \wedge \xi^j - i_x\psi.$$

Ce qui nous permet d'avoir pour tous $x \in \mathcal{G}$ et $Y \in \Lambda\mathcal{G}$

$$i_{exp_\wedge \mathbf{r}} dx = dx + i_\mathbf{r}(dx) = d_\gamma x + \sum_j (ad_x^\mu e_j) \wedge \xi^j - i_x\psi - \frac{1}{2} < \xi^\mu, x > .$$

Ainsi, en utilisant la définition de D, on trouve pour tous $x \in \mathcal{G}$ et $Y \in \wedge\mathcal{G}$

$$\Re_x(Y) = D_{i_{exp_\wedge \mathbf{r}} dx}(Y) = (d_\gamma x) \wedge Y + ad_x^\mu Y + i_{i_x\psi} Y - \frac{1}{2} < \xi^\mu, x > Y;$$

d'où l'expression de $\Re_x(Y)$.
L'expression de $\Re_\xi(Y) = (D \circ i_{exp_\wedge \mathbf{r}} \circ d)(\xi)(Y)$ se calcule de la même manière et est identique à celle du cas des quasi-bigèbres de Lie. Ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque 4.5. 1. Si $\psi = 0$, on retrouve la représentation décrite dans le théorème 4.1 pour les quasi-bigèbres de Lie; si $\psi = \phi = 0$, on retrouve celle décrite dans ([13]) pour le cas des bigèbres de Lie.
2. Dans le cas des proto-bigèbres de Lie, comme ni $(\mathcal{G}, \mu)$, ni $(\mathcal{G}^*, \gamma)$ ne sont des sous-algèbres de Lie de $\mathcal{D}$, les opérateurs d_μ et d_γ ne sont que des dérivations de $\wedge\mathcal{G}^*$ et $\wedge\mathcal{G}$ respectivement, car ils ne sont pas de carrés nuls.
3. L'isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules entre $\wedge\mathcal{D}$ et $End(\wedge\mathcal{G})$ reste encore en vigueur.

Remerciements : Le premier auteur remercie les autorités de l'IMSP et le gouvernement allemand à travers la convention DAAD-IMSP pour le soutien pédagogique et financier dans le cadre de ses recherches; le second remercie vivement le Centre Abdus Salam ICTP pour l'hospitalité et le soutien matériel qui ont permis la réalisation d'une bonne partie de ce travail. Ils remercient enfin le Professeur Yvette Kosmann-Schwarzbach et le Referee pour leurs remarques et suggestions sur le contenu du travail.

References

[1] M. Bangoura, *Quasi-bigèbres jacobiennes et généralisations des groupes de Lie-Poisson*, Thèse, Université de Lille 1 (France), 1995.

[2] M. Bangoura, *Quasi-bigèbres de Lie et algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles*, Comm. in Algebra, 31 no 1, 29-44 (2003).

[3] M. Bangoura, Y. Kosmann-Schwarzbach, *The double of a Jacobian quasi-bialgebra*, Lett. Math. Physics, 28 (1993) 13-29.

[4] V. G. Drinfeld, *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations*, Soviet. Math. Dokl. 27 (1983), 68-71.

[5] V. G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras, Leningrad Math. Journal*, 1 (6) (1990) 1419-1457.

[6] E. Getzler, *Manin pairs and topological conformal field theory*, Ann. of Physics 237 (1995) 161-201.

[7] W. Greub, *Multilinear Algebra*, Berlin/New York, Springer-Verlag, 1984.

[8] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Jacobian quasi-bialgebras and quasi-Poisson Lie groups*, Contemporary Mathematics 132 (1992) 459-489.

[9] Y. Kosmann-Schwarzbach, and F. Magri, *Poisson-Nijenhuis structures*, Ann. Inst. H. Poincaré, Physique Théorique, 53 (1990) 35-81.

[10] B. Kostant and S. Sternberg, *Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite dimensional Clifford algebras*, Ann. Physics. 176 (1) (1987), 49-113.

[11] J. L. Koszul, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, Bull. Soc. Math. France, 78 (1960) 65-127.

[12] J. L. Koszul, *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*, Astérisque, hors série, Soc. Math. France, Paris (1985) 257-271.

[13] J. H. Lu, *Lie bialgebras and Lie algebra cohomology*, Preprint 1996, non publié.

Ibrahima BAKAYOKO
Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP),
BP 613 Porto-Novo, Bénin
Email : ibrahimabakayoko@yahoo.fr

Momo BANGOURA
Département de Mathématiques, Université de Conakry
BP 1147, République de Guinée
Email: bangm59@yahoo.fr