4.4.2. Exemple 2

Le profil des préférences est :

A	x	y	z
B	y	x	z
C	z	x	y

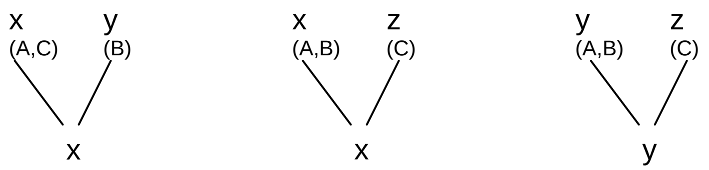
4.4.2.1. MAJORITE SIMPLE (PLURALITE)

Cette fois-ci, aucun projet n'obtient une majorité simple étant donné que chaque projet obtient une voix.

Dans ce cas, l'on peut dire que sur le plan collectif, l'on ne peut pas départager les projets, que l'on peut dès lors considérer comme indifférents entre eux, soit y~x~z.[1]

4.4.2.2. METHODE DE CONDORCET

Les confrontations deux à deux donnent



Donc le projet x est le Condorcet winner car il obtient aussi bien une majorité absolue contre y que contre z. Le projet z est le 'Condorcet loser'. Il importe de noter qu'à partir du moment où l'on a un Condorcet winner, ce dernier l'emporte peu importe l'agenda choisi.

[1] En pratique, il faudrait prévoir une procédure pour désigner le gagnant dans pareil scénario p.ex. un tirage au sort, une voix prépondérante pour un Président, s'il y en a un, une règle d'ancienneté ou d'âge. Nous supposons par la suite qu'il existe toujours une telle règle, à savoir un tirage au sort et que cette règle est connue par chacun.

4.4.2.3. Methode de Borda

Avec la méthode de Borda, on obtient

	x	y	z
A	2	1	0
B	1	2	0
C	1	0	2
	4	3	2

C'est le projet x qui obtient le plus de voix et, partant, remporte le vote. L'ordre social est xyz.

La matrice des vote est :

	x	y	z	Total voix	Score Copeland
x	/	2	2	4	2
y	1	/	2	3	0
z	1	1	/	2	-2

La matrice des votes est un instrument extrêmement utile pour analyser un profil des préférences par rapport à la méthode du Condorcet winner et à la méthode de Borda.

On peut encore la compléter par une dernière colonne qui reprend pour chaque projet en ligne le nombre de fois qu'il occupe la première place, ce qui nous permet de visualiser dans le même tableau également le vote à la pluralité. En l'occurrence, l'on obtient :

	x	y	z	Total voix	Score Copeland	Nombre 1^{iers} rangs
x	/	2	2	4	2	1
y	1	/	2	3	0	1
z	1	1	/	2	-2	1

Notons encore qu'une façon quelque peu différente de présenter le profil des préférences est le tableau suivant :

Profil	$\{x,y\}$	$\{y,z\}$	$\{x,z\}$
x y z	x > x	y > z	x > z
y x z	y > x	y > z	x > z
z x y	x > y	z > y	z > x
Résultat majoritaire	x > y	y > z	x > z

4.4.2.4. CONCLUSION

En résumé :

	MS	MC	MB
choix	-	x	x
ordre collectif	y~x~z	y x z	y x z

Cette fois-ci, la majorité simple ne donne pas de résultat tandis que les méthodes de Condorcet et de Borda en donnent un, de surcroît le même, à l'instar de l'exemple 1. Donc, le projet qui est le Condorcet winner est également le Borda winner, quid à ce que ce projet ne l'emporte pas à la majorité simple.

On pourrait expliquer le constat que les méthodes de Condorcet et de Borda donnent chacune une réponse contrairement à la majorité simple en disant que les méthodes de Condorcet et de Borda utilisent plus d'informations, ce qui leur permet de départager les projets par comparaison à la majorité simple qui se décline uniquement par rapport à la première place de chacun des ordres de préférence individuels.

4.4.2.5. METHODE DE L'ANTI-PLURALITE

Supposons qu'il y a n projets et que chaque votant va devoir donner à chacun des n-1 projets qu'il préfère le plus une voix. Autrement dit, le seul projet auquel un votant ne donne pas de voix est le projet qu'il préfère le moins.

Le projet qui le remportera sera le projet qui obtient le plus de voix, c'est-à-dire le projet qui le moins souvent est considéré comme étant le plus mauvais.

En l'occurrence, chaque votant choisira deux des trois projets avec une voix pour chacun des projets choisis. On aura que le projet x obtiendra 3 voix, le projet y deux voix et le projet z aura 1 voix. C'est donc le projet x qui l'emporte.

On pourrait définir l'anti-pluralité également en ce sens que chacun doit donner une voix au projet qu'il préfère le moins et le projet qui aura le moins de voix va l'emporter. On aura que z obtiendra 2 voix, y une voix et x aucune.

De nouveau, le projet x l'emportera.

4.4.2.6. UN AUTRE EXEMPLE. EXEMPLE 2A

Soient 5 votants P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 devant choisir parmi les projets x, y et z et soit le profil des préférences suivant :

P_1, P_2	x	z	y
P_3, P_4	y	z	x
P_5	z	x	y

D'après la majorité simple, il n'y a aucun projet qui l'emporte.

Le projet z est le Condorcet winner tout comme il est le Borda winner. Le projet y est à la fois le Borda loser et le Condorcet loser.

4.4.3. Exemple 3

Soit le profil des préférences suivant :

A	x	y	z
B	x	y	z
C	y	z	x

4.4.3.1. MAJORITE SIMPLE

C'est le projet x qui le remporte à la majorité simple. L'ordre collectif est x y z.

4.4.3.2. METHODE DE CONDORCET

Les confrontations deux à deux donnent :

x	y	x	z	y	z
(A,B)	(C)	(A,B)	(C)	(A,B,C)	
x		x		y	

C'est le projet x qui est le Condorcet winner. Le projet z est le Condorcet loser. L'ordre collectif est x y z.

4.4.3.3. METHODE DE BORDA

Avec la méthode de Borda, on obtient :

	x	y	z
A	2	1	0
B	2	1	0
C	0	2	1
	4	4	1

Il n'y a pas de Borda winner, les projets x et y se classent chacun en première place avec 4 voix chacun. L'ordre collectif est x~y>z.

Nous constatons qu'il y a une indifférence entre x et y classés chacun au premier rang. Rappelons que si nous avons exclu les préférences individuelles où il y a une indifférence, cela n'exclut nullement qu'il puisse y avoir une indifférence sur le plan collectif.

La matrice du vote est :

	x	y	z	Total	Score Copeland	Nombre 1[iers] rangs
x	/	2	2	4	2	2
y	1	/	3	4	0	1
z	1	0	/	1	-2	0

4.4.3.4. CONCLUSION

En résumé :

	MS	MC	MB
choix	x	x	-
ordre	x y z	x y z	x~y>z

Cette fois-ci, le projet x l'emporte sous la majorité simple et sous Condorcet.

Toutefois, le Condorcet winner n'est pas le Borda winner dans la mesure où le projet x ne sort pas vainqueur unique de la méthode de Borda.

De cela, nous pouvons conclure que les méthodes de Condorcet et de Borda ne donnent pas forcément le même résultat. Tout en utilisant plus d'informations que la majorité simple, et sans que cela n'implique que les résultats doivent forcément diverger, les deux méthodes n'utilisent toutefois pas exactement les mêmes informations contenues dans le profil des préférences.

Analysons encore d'autres méthodes d'agrégation.

4.4.3.5. ANTI-PLURALITE

Avec la méthode de l'anti-pluralité, c'est le projet y qui l'emporte et l'ordre collectif est y x z.

4.4.3.6. MÉTHODE « DE BUCKLIN »

D'après la méthode de Bucklin, dans un premier tour on choisit le projet qui obtient une majorité absolue. Si un tel projet ne se dégage pas, on donne lors d'un deuxième tour à chaque projet autant de points qu'il occupe la première ou la deuxième fois et le projet qui l'emporte est celui qui a une majorité absolue et ainsi de suite.

Au premier tour, on a :

x	y	z
2	1	0

Au deuxième tour, on a :

x	y	z
2	1	0
0	2	1
2	3	1

C'est le projet y qui l'emporte.

4.4.3.7. MÉTHODE DE NANSON[1]

La méthode de Nanson, aussi appelée méthode de Borda par éliminations successives, consiste à appliquer la méthode de Borda successivement, avec élimination à chaque tour du projet qui recueille le moins de supports.

Appliquons la méthode de Nanson.

Au premier tour, on a le résultat ci-dessus et on élimine le projet z. Au deuxième tour, il reste les projets x et y et c'est le projet x qui l'emporte.

En fait, Nanson a proposé une forme abrégée de cette approche[2], à savoir on élimine à chaque tour non seulement le projet qui a reçu le moins de soutien, mais tous les projets qui ont un score Borda inférieur à la moyenne.

---

[1] E.J. Nanson a été un mathématicien australien (1875-1922).

[2] J.-L. Boursin, *Les Paradoxes du vote*, Odile Jacob, 2004.

En l’occurrence, le Borda score total est de 9, la moyenne étant de 3 $\left(\frac{9}{3}\right)$.

Au premier tour, on élimine le projet z.

Il reste les projets x et y. Avec deux projets, la méthode de Borda (une voix pour le premier, 0 pour le second) coïncide avec le vote à la majorité. C’est le projet x qui l’emporte.[1] [2]

4.4.3.8. METHODE DU VETO (NEGATIF)

Supposons que chaque votant doive indiquer le projet qu’il préfère le moins et qu’il a en relation avec ce dernier un véto, en ce sens que peu importe l’opinion des autres, ce projet est d’office écarté.

S’il reste plus qu’un projet, un deuxième tour est organisé et ainsi de suite.

En l’occurrence, au premier tour, on a que A et C expriment un véto contre z et que B exprime un véto contre x. Il en résulte que le projet gagnant est le projet y qui n’est pour aucun votant le projet le moins préféré.

Le projet x qui l’emporte à la majorité, même absolue, est classé par le votant B au dernier rang de ses préférences.

4.4.3.9. EXEMPLE 3B

Soit le profil des préférences :

A	x	y	z
B	x	y	z
C	y	x	z

Ce profil se distingue du précédent de par l’inversion dans le troisième ordre individuel des projets z et x. On a y x z au lieu de y z x.

Cette fois-ci, on a le même projet qui l’emporte selon chacune des méthodes de vote, à savoir le projet x.

Structurellement, cet exemple est identique à l’exemple 1.

---

[1] On peut montrer que si un Condorcet winner existe, alors ce projet est également choisi par la méthode de Nanson.

[2] Le fait que la méthode de Borda peut ne pas donner de résultat non équivoque n’est donc pas lié à l’existence d’une cyclicité, celle-ci est une condition suffisante, mais pas nécessaire pour que la méthode de Borda ne dégage pas un et un seul projet gagnant.

La matrice des votes est :

	x	y	z	Total	Score Copeland
x	/	2	3	5	2
y	1	/	3	4	0
z	0	0	/	0	-2

4.4.3.10. EXEMPLE 3C

Soit le profil des préférences, donné par 3 votants A, B et C et 4 projets :

A	z	y	t	x
B	z	y	t	x
C	y	z	t	x

De nouveau, le même projet l'emporte avec les trois méthodes de vote, en l'occurrence il s'agit du projet z.

La matrice des votes est :

	x	y	z	t	Total des voix	Score Copeland
x	/	0	0	0	0	-3
y	3	/	1	3	7	1
z	3	2	/	3	8	3
t	3	0	0	/	3	-1

4.4.4. Exemple 4 et le paradoxe d'Arrow-Condorcet

Le profil des préférences est

A	x	z	y
B	y	x	z
C	z	y	x

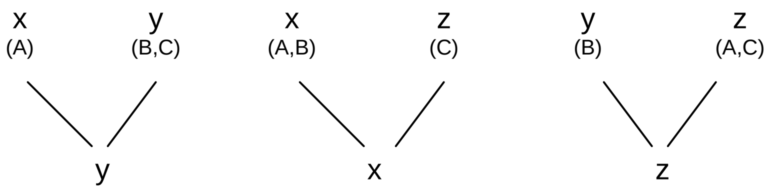
4.4.4.1. MAJORITE SIMPLE

Aucun projet ne réunit une majorité simple puisque chaque projet obtient une voix, ce qui donne ici $\frac{1}{3}$ du total des voix émises. Le classement au niveau collectif, à travers la méthode de la majorité simple appliquée au profil des préférences donné, se caractérise par une indifférence entre ces 3 projets[1], donc x~y~z.

4.4.4.2. METHODE DE CONDORCET

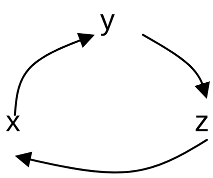
4.4.4.2.1. Le résultat

Les confrontations deux à deux donnent :



Comme aucun projet n'obtient une majorité absolue face à chacun des deux projets restants, il n'existe pas de Condorcet winner. y le remporte face à x, mais « *perd* » contre z, x le remporte face à z, mais « *perd* » contre y et z l'emporte face à y, mais « *perd* » contre x.

Graphiquement, on a :



Nous constatons qu'au niveau collectif il existe un cycle. La société (les trois votants collectivement) préfère chaque projet à tous les autres, ou autrement dit, pour n'importe quel projet, il existe toujours un autre projet qui lui est préféré au niveau de la collectivité.

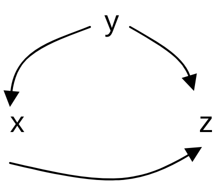
Dans les exemples 1, 2 et 3 tel n'était pas le cas.

Dans l'exemple 1, on avait que y>x, x>z et x>z.

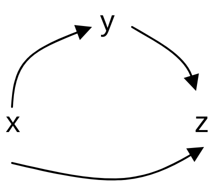
Dans l'exemple 2, on avait x>y, y>z et x>z. Donc ni dans l'exemple 1, ni dans l'exemple 2 il n'y a eu cyclicité.

Dans l'exemple 3, on avait x>y, y>z et x>z.

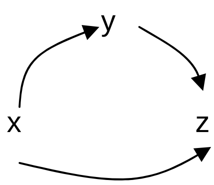
Exemple 1



Exemple 2



Exemple 3



[1] Le signe ~ indique une indifférence.

4.4.4.2.2. Cyclicité et non-transitivité

Pour trois projets quelconques x, y et z, on dit qu'il y a transitivité si on a que si x>y et y>z, alors x>z, ou de façon plus générale il y a transitivité si un projet x l'emporte sur un projet y, et si le projet x l'emporte également contre tous les projets par rapport auxquels le projet y l'emporte.

Dans notre exemple 4, il y a cyclicité et celle-ci entraîne qu'il n'y a pas non plus transitivité au niveau collectif.

En effet, on a vu que x>y et que y>z sans que l'on ait x>z. Au contraire, on a que z>x.

Les préférences collectives sont circulaires, et partant non transitives. Ce phénomène est appelé le paradoxe d'Arrow-Condorcet. Il n'existe pas de Condorcet winner. [1]

4.4.4.2.3. Cyclicité, agenda setting et « path dependence »

Si le profil des préférences se caractérise par une cyclicité, et donc une non-transitivité, la méthode de Condorcet pose problème puisqu'il n'existe pas de Condorcet winner.

Qui plus est, il apparaît maintenant un problème au niveau de l'agenda setting.

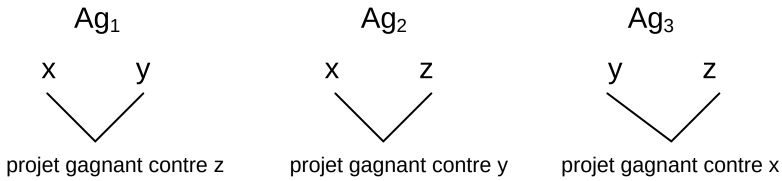
On a vu à l'exemple 1, chose vraie également pour l'exemple 2 (vérifiez-le), qu'indépendamment du choix de l'agenda, on a toujours eu le même résultat, à savoir que le Condorcet winner l'a remporté.

De façon générale, on peut affirmer que s'il existe un Condorcet winner, celui le remportera toujours, n'importe le stade où il intervient dans un agenda donné et donc peu importe l'agenda retenu.

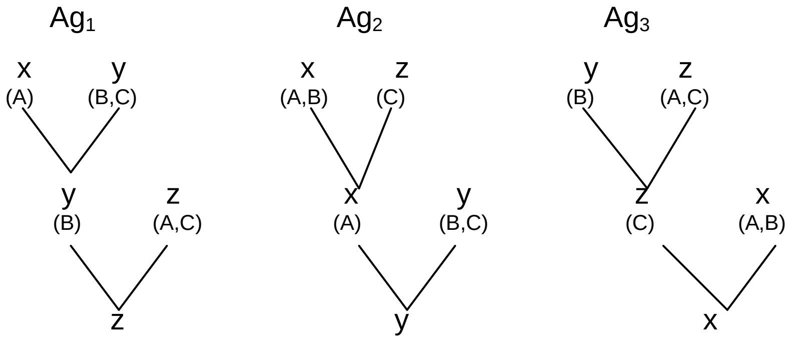
S'il y a cyclicité, tel n'est plus le cas.

Il existe trois façons en présence de trois projets d'organiser les deux tours de vote, l'agenda, à savoir Ag_1, Ag_2 et Ag_3.

[1] La transitivité implique la quasi-transitivité qui, à son tour, implique l'acyclicité. Par contre, l'acyclicité n'implique pas la quasi-transitivité et a fortiori pas la transitivité. Supposons que quelqu'un préfère Beethoven (B) à Mozart (M) et Mozart à Schubert (S), mais est indifférent entre Beethoven et Mozart. Dans ce cas, ses préférences sont acycliques puisqu'il n'y a pas de cycle. (Il y aurait un cycle si on avait B>M, M>S et S>B). En effet, on a B>M, M>S et S~B. Cette relation toutefois n'est pas quasi-transitive, car cela aurait impliqué que B>S. Rappelons que nous avons simplifié notre analyse en ne prenant pas en compte des situations où il y a des indifférences dans un ordre de préférences individuelles. Ceci n'exclut pas que l'on ait au niveau collectif des ex aequo (« *ties* »).



Force est de constater que ces trois agendas ne dégagent cette fois-ci pas le même résultat final. En effet :



Pour chacun de ces agendas, c'est un projet différent qui gagne. S'il y a cyclicité, le choix de l'agenda n'est donc plus neutre quant au résultat final.

Donc, nous pouvons conclure qu'à chaque agenda possible, il correspond un autre résultat final.

Ce constat, en soi problématique, peut aussi avoir pour conséquence que l'on peut « *manipuler* » le résultat par le biais du choix de l'agenda.

Supposons que B peut fixer l'agenda. Comme B préfère le projet y, il pourrait choisir l'agenda 2 puisque cet agenda assurerait que son projet préféré l'emporte.[1]

En fixant « *le bon agenda* », celui qui contrôle l'agenda, que ce soit un des votants ou un tiers, il peut « *orienter* », « *manipuler* » le résultat collectif en direction de ses préférences individuelles. Autrement dit, le résultat final est fonction du « *chemin* » (de vote) choisi (« *path dependence* »).

Pour résumer, retenons que la problématique de l'agenda setting se concrétise, il est nécessaire et suffisant qu'il n'y ait pas de Condorcet winner. Par contre, s'il existe un Condorcet winner, peu importe l'agenda choisi, ce sera toujours le même projet qui en sort gagnant et c'est précisément le Condorcet winner.

La matrice de vote est :

	x	y	z	Total voix	Score Copeland	Nombre 1^{iers} rangs
x	/	1	2	3	0	1
y	2	/	1	3	0	1
z	1	2	/	3	0	1

[1] En pratique, dans des cas plus compliqués, il faut disposer de certaines informations. Ici, tel n'est pas le cas. Il suffit de passer au premier vote les deux projets que l'on veut voire écartés. Si on veut faire gagner le projet z, on oppose d'abord x et y.

Chaque projet gagne une confrontation et perd une confrontation, d'où chaque projet a le même score de Copeland.

En l'occurrence, le core est vide. Aucun projet n'a la caractéristique qu'il ne perd aucune confrontation.

Représentons le profil encore par le tableau ci-dessus :

	Nombre de premières places	Nombre de deuxièmes places	Nombre de troisièmes places	Total
x	1	1	1	3
y	1	1	1	3
z	1	1	1	3
Total	3	3	3	

On voit bien que chaque projet occupe chaque fois une place différente et chacune des places possibles.

4.4.4.2.4. Une remarque encore

Si on veut qu'au niveau collectif le principe de transitivité soit respecté, on n'a pas d'autre choix que de renoncer à toute méthode de vote et de « *déclarer* » que la relation de préférence d'un individu devient la relation de préférence collective. Cela reviendrait à faire de l'individu en question le dictateur.

Si p.ex. on voudrait la transitivité collective telle que y x z, alors il faudrait faire de B le dictateur.

Il faut donc, pour avoir une transitivité au niveau collectif, déclarer (mais qui fait ce choix) un des trois individus le dictateur en ce sens que son ordre des préférences individuel est érigé en ordre collectif.

4.4.4.3. METHODE DE BORDA

Avec la méthode de Borda, on obtient :

	x	y	z
A	2	0	1
B	1	2	0
C	0	1	2
	3	3	3

Force est de constater qu'aucun projet ne l'emporte, chaque projet obtenant exactement le même nombre de voix, soit $\frac{1}{3}$ du total des 9 voix émises.

Ce résultat s'explique par la cyclicité[1] ou, en l'occurrence, de façon plus intuitive, par le fait que chaque projet occupe dans le profil des préférences constitué par les ordres de préférence individuels des trois entités A, B et C respectivement une fois une première place, une fois une deuxième place et une fois une troisième place.

La méthode de Borda ne dégage pas de projet gagnant. Au niveau collectif, les trois projets sont classés « *ex aequo* ». On peut dire qu'au niveau de l'ordre collectif, les trois projets sont « *indifférents* » et, par extension qu'il n'y a pas de résultat unique, entendons par là qu'il n'y a pas de projet gagnant unique.

4.4.4.4. Conclusion

En résumé :

	MS	MC	MB
choix	-	-	-
ordre	x~y~z	x~y~z[2]	x~y~z

La majorité simple ne donne pas de résultat unique, puisque les trois projets ne sont pas départagés, chacun obtenant une voix. Il en est de même des méthodes de Condorcet et de Borda. Il n'existe pas de Condorcet winner parce qu'il y a cyclicité (ou autrement dit, la méthode de Condorcet sous forme des votes deux à deux donne pour chaque agenda possible un gagnant différent) et cette cyclicité fait que chaque projet recueille le même nombre de voix dans la méthode de Borda.

Cet exemple nous indique que même si tous les individus ont des préférences individuelles claires, cohérentes et transitives, comme tel est le cas dans l'exemple sous revue, il n'en est pas nécessairement de même au niveau des préférences collectives, c'est-à-dire au niveau des préférences individuelles agrégées. Celles-ci peuvent, comme illustré dans cet exemple, être cycliques et, partant, non-transitives, avec comme conséquence qu'aucune des trois méthodes de vote ne donne un résultat unique.

On pourrait penser qu'une autre méthode de vote, différente de celles que l'on a vues, pourrait éviter à coup sûr un « *résultat collectif* » immunisé au risque de non-transitivité/cyclicité au niveau collectif. Tel n'est pourtant pas

[1] Cela ne signifie pas que si cyclicité il y a, on a forcément que la méthode de Borda classe ex æquo tous les projets (cf. section 4.5.2.).

[2] Cette écriture 'x~y~z', strictement parlant, n'est pas acceptable puisque l'on utilise le concept d'indifférence en présence d'une cyclicité. Il en est autrement pour la méthode de Borda p.ex. où chaque projet, tout simplement, a le même nombre de voix.

le cas comme il découle d'un théorème fameux que l'on verra à la section 8, le théorème d'Arrow-Condorcet.

Ce résultat, où on a des préférences cycliques, c'est-à-dire où l'on a que la « *société ne sait pas ce qu'elle veut* », est appelé le paradoxe d'Arrow-Condorcet.

On peut s'interroger sur la probabilité de rencontrer des profils de préférence qui engendrent une telle acyclicité. Il est possible de montrer que la probabilité augmente si le nombre d'acteurs augmente ou si le nombre de projets augmente.

Partant, ceteris paribus, la probabilité augmente avec la dimension du groupe et avec le nombre d'options parmi lesquelles un groupe doit choisir. Donc, et inversement, plus le groupe est petit et plus les préférences des membres du groupe sont similaires, moins le paradoxe est probable.

Trois remarques encore, d'importance.

Premièrement, notons que la cyclicité soulève des questions de stabilité, de « *manipulabilité* » et de « *non contrôlabilité* ». On y reviendra plus tard.

Deuxièmement, si au niveau collectif il peut y avoir une cyclicité, donc également une non-transitivité à la base, et c'est le paradoxe, de préférences individuelles absolument transitives, l'on doit toutefois être conscient que si les préférences individuelles n'étaient pas transitives, on aurait de même une non transitivité au niveau collectif.

Ce constat est doublement significatif. D'abord, strictement parlant, le constat d'une non transitivité au niveau collectif pourrait résulter d'une non transitivité au niveau individuel et, à ce moment, le niveau collectif refléterait de façon 'cohérente' le niveau individuel. Ensuite, force est de constater que le mécanisme du vote par paires, la méthode de Condorcet, per se, dans son fonctionnement interne, ne différencie pas selon qu'au départ les préférences individuelles sont transitives ou non.[1]

Troisièmement, si cyclicité il y a, cela n'empêche pas que pragmatiquement il faut décider. Comment faire alors ?

En effet, si l'on est confronté à une cyclicité, comment s'en sortir en pratique puisque aucune méthode de vote ne dégage une réponse quant au projet à choisir ?

On pourrait argumenter que dans ce cas, il ne faut retenir aucun projet. Or, tel ne peut être le cas. Soit le statu quo est possible et dès lors constitue une des options. Et si cyclicité il y a, par définition, elle inclut l'option du statu quo. Soit le statu quoi n'est pas une possibilité et alors il ne saurait être une réponse à la cyclicité.[2]

---

[1] Ce point théoriquement très important est particulièrement souligné par Donald Saari (cf. *Decisions and Elections*, Cambridge University Press, 2001).

[2] cf. aussi note de bas de page 2 page 74.

Une issue possible en pareil cas d'ex æquo entre tous les projets, serait de recourir à une procédure de sélection neutre, anonyme et parfaitement aléatoire, comme le tirage au sort.[1]

Alors, chaque projet aurait une chance égale de sortir gagnant face à une situation où l'on n'a pas su départager, d'aucune façon, les 3 projets à travers une procédure de décision basée sur et reflétant les volontés individuelles.

4.4.4.5. LE CONCEPT DE « TOP CYCLE »

Soit le profil des préférences ci-après, à trois votants, mais à quatre projets :

A	w	x	y	z
B	w	y	z	x
C	w	z	x	y

Montrez que w est le majority winner, le Condorcet winner et le Borda winner. Montrez qu'il existe cependant une cyclicité dans l'ordre social, à savoir entre x, y et z. Cette cyclicité, qui n'est pas globale mais « *locale* », se localise en l'occurrence dans le bas de l'ordre collectif.

Le tableau est :

	w	x	y	z	Total	Copeland
w	/	3	3	3	9	3
x	0	/	2	1	3	-1
y	0	1	/	2	3	-1
z	0	2	1	/	3	-1

Prenons encore le profil suivant à trois votants et 6 projets :

a	b	c	x	y	z
b	c	a	y	z	x
c	a	b	z	x	y

Nous constatons qu'il y a un cycle local entre a, b et c, et un deuxième cycle local, entre x, y et z.

Cependant, les deux cycles ne se chevauchent pas. Le cycle a, b, c est le « *top-cycle set* » et le cycle x, y, z est le « *low-cycle set* ». Chaque élément du « *top cycle* » l'emporte à la majorité sur chaque élément du « *low cycle* ».

On peut définir le concept de « *top cycle* » comme l'ensemble des projets qui ont chacun la caractéristique qu'il n'existe pas par rapport à ce projet de projet parmi les projets au choix qui lui sont préférés.

---

[1] Y aurait-il, face à une telle constellation paradoxale, unanimité pour procéder au tirage au sort (pourrait-on, pour y répondre, recourir, par analogie, au 'voile de l'ignorance' de Rawls ?) ? Notons que l'on (mais qui ?) pourrait imposer au niveau collectif un ordre transitif p.ex. en partant de y>z et de z>x pour <u>conclure</u> qu'il faut avoir y>x. Dans pareil scénario, l'ordre serait décrété et, partant, inéluctablement serait celui d'un individu, en l'occurrence l'individu 2 qui, en quelque sorte, serait investi d'une caractéristique de dictateur.

Dans le premier exemple de quatre projets, le « *top cycle* », T_c, est $T_c = \{w\}$, dans le deuxième exemple, il est $T_c = \{a, b, c\}$.

Notons que dans chacun des deux exemples, il y a une non transitivité, mais il n'y a pas de cycle global, c.-à-d. le « *top cycle* » ne reprend pas l'ensemble des projets au choix.

Dans notre exemple de base de cette section, le top cycle est $T_c = \{x, y, z\}$.

4.4.4.6. QUATRE AUTRES EXEMPLES

4.4.4.6.1. Exemple 4A

Le profil des préférences est :

A	x	y	z
B	y	z	x
C	z	x	y

Montrez qu'avec ce profil des préférences, les résultats avec les trois méthodes sont identiques à celle de l'exemple 4, à savoir qu'aucune méthode n'arrive à départager les 3 projets.

Notons que, mutatis mutandis, l'on a le même résultat s'il y a pour chacun des trois ordres individuels n votants.

Force est également de constater qu'avec un tel profil des préférences, un seul changement peut bousculer le résultat.

Soit un votant des n ayant l'ordre z x y qui change son ordre, en plaçant y devant z. On aura :

n	x	y	z
n+1	y	z	x
n-1	z	x	y

Ce sera le projet y qui l'emportera. Un petit changement – et il y a énormément de petits changements possibles – aura de grandes conséquences. Et si beaucoup ou chacun ne changent leurs préférences ?

4.4.4.6.2. Exemple 4B

Soit le profil des préférences suivant :

A	z	y	x
B	y	x	z
C	x	z	y

Analysez-le.

4.4.4.6.3. Une problématique de pure distribution

Une somme de 100 est à répartir entre trois personnes A, B et C.

Admettons qu'il y ait trois répartitions a priori possibles, x(50 ;20 ;30), y(20 ;30 ;50) et z(30 ;50 ;20).

On a alors le profil des préférences suivant, en supposant que chacun préfère plus à moins :

A	x	z	y
B	z	y	x
C	y	x	z

Nous retrouvons le paradoxe de Condorcet.

Interrogeons-nous maintenant s'il était possible de trouver une répartition k*du montant de 100 entre les trois personnes qui aurait la propriété qu'il n'existe pas d'autre répartition qui serait majoritairement préférée à k*.

Prenons p.ex. la répartition $\left(33\frac{1}{3},33\frac{1}{3},33\frac{1}{3}\right)$. Or, force est de constater qu'il y aurait une majorité, à savoir B et C, pour la répartition (20 ;40 ;40). A cette dernière serait préférée sur la base d'un vote majoritaire, la répartition p.ex. (30 ;20 ;50) et ainsi de suite.

En fait, chaque répartition peut être battue par une autre répartition. Le vote à la majorité tourne en cycle.

Autrement dit, un pur problème de répartition d'une grandeur donnée[1] et à supposer que chacun individuellement préfère la répartition où il a le plus, est, de façon inhérente, cyclique en cas de choix majoritaires.

Ce constat est assez inquiétant puisqu'il met en évidence, ceteris paribus, un élément d'instabilité démocratique.

Précisons quelque peut cette pensée. A cette fin, il y a lieu, conceptuellement, de distinguer selon que l'on part d'un état 'origine/zéro' ou d'un état (historiquement) donné. Prenons la deuxième approche. Chacun dispose au départ d'un revenu de marché. Tous les scénarios de redistribution, allant d'une absence de redistribution à des redistributions extrêmes, sont concevables et chaque proposition de redistribution peut être majoritairement renversée par une autre.[2]

Toutefois, si la société accepte les deux principes de base vus précédemment (cf. section 3.2), le champ de redistribution potentiel se

---

[1] un jeu à somme nulle (« *zero-sum game* »).

[2] cf. à ce sujet le livre intéressant de Dan Usher, *The Economic Prerequisite of Democracy*, Columbia University Press, 1981.

rétrécit à des états probablement plus acceptables parce que, notamment, caractérisés par des préférences unimodales. (cf. plus loin)

Nous sommes en présence d'un jeu de pur conflit, un zero sum game où le gain de l'un est la perte de l'autre et vice-versa.

Chaque répartition, chaque coalition, peut être bloquée par une autre coalition. Autrement dit, chaque coalition est bloquée. Le « *core* », cœur, de ce jeu l'ensemble des coalitions qui ne sont pas bloquées, est en l'occurrence vide.

4.4.4.6.4. Splicing and Factoring

Supposons qu'il s'agisse de se prononcer, premièrement, si les dépenses d'éducation doivent être basses ou élevées et, deuxièmement, si les dépenses de sécurité doivent être basses ou élevées.

Le tableau ci-après indique les préférences de trois groupes, d'égale importance, en relation avec ces décisions, à savoir les libéraux, les numériques conservateurs et les modérés.

Supposons que les préférences qui ne sont pas ordinales, mais cardinales, se présentent comme suit :

	Dépenses éducatives		Dépenses sécurité	
	basse	élevée	basse	élevée
libéral	0	11	1	0
conservateur	1	0	0	11
modéré	2	0	3	0

On suppose que les choix collectifs sont à prendre à la majorité.

Il existe deux approches pour décider de l'intensité des dépenses d'éducation et de l'intensité des dépenses de sécurité.

On peut soumettre à un vote séparé l'intensité des dépenses d'éducation et à un vote séparé l'intensité des dépenses de sécurité ou l'on peut organiser un seul vote comportant en fait quatre projets et non plus deux.

Si on soumet chaque dépense à une décision séparée (on dit alors que les issues sont « *factored* »), alors une majorité se prononcera pour des dépenses d'éducation peu élevées et une majorité se prononcera en matière pour des dépenses de sécurité pour des dépenses peu élevées.

Si maintenant les décisions sont combinées (« *spliced* »), on a la situation suivante :

	Dépenses éducatives/Dépense sécurité			
	(élevé, élevé)	(bas, bas)	(élevé, bas)	(bas, élevé)
libéral	11	1	12	0
conservateur	11	1	0	12
modéré	0	5	3	2

En fait, une telle approche consiste à soumettre au vote quatre projets différents, à savoir :

EE : dépenses élevées de chaque catégorie
EB : dépenses éducation élevées et de sécurité basse
BE : dépenses éducation basses et de sécurité élevées
BB : dépenses basses de chaque catégorie

Si on soumet quatre projets combinés au vote majoritaire, on aura une voix pour (E,B), une voix pour (B,E) et une pour (B,B).

Il n'y a pas de Condorcet winner, puisqu'il y a un cycle.

Notons que la méthode de Borda donne :

EE	BB	EB	BE
2	1	3	0
2	1	0	3
0	3	2	1
5	5	5	4

Il n'y a pas de Borda winner.

Donc, force est de constater qu'avec le « *Splicing* », il apparaît un cycle.

Tel n'a pas été le cas en présence de deux votes séparés, chacun se déroulant le long d'une seule dimension « niveau de la dépense » et pas de deux dimensions comme avec le « *splicing* ».

D'où les deux principes que l'on retrouve dans la littérature[1] :

- "*Splicing increases the gains from cooperation and factoring decreases the losses form conflict*."

- "*Splice when cooperation is likely, factor when conflict is likely.*"

4.4.4.6. Une generalite

Avec trois projets x, y et z, on peut avoir 6 profils de préférences individuelles différentes, à savoir :

1. x y z
2. y z x
3. z x y
4. z y x
5. x z y
6. y x z

S'il y a trois votants, il y a en tout $6{\cdot}6{\cdot}6=6^3=216$ profils de préférences possibles.

De ces 216 profils de préférences, il y en a 12 qui sont cycliques.

[1] cf. R. Cooter.

En effet, il s’agit des six profils 1,2,3 ; 1,3,2 ; 2,1,3 ; 2,3,1 ; 3,1,2 et 3,2,1 ainsi que des six profils 4,5,6 ; 4,6,5 ; 5,4,6 ; 5,6,4 ; 6,4,5 et 6,5,4.[1]

Si on suppose que chacun de ces profils de préférence est équiprobable (hypothèse dite de l’« *impartial culture condition* ») alors la probabilité d’un cycle dans le cas de 3 votants et de 3 projets est de $\frac{12}{216}$.[2]

L’hypothèse de l’équiprobabilité souvent est peu réaliste comme on le verra dans la sous-section suivante.

De façon générale, s’il y a m projets et n votants (et en excluant les indifférences), on peut avoir $(m!)^n$ profils des préférences différents.

Si on a que m=2 et n=3, et en désignons par x et y les projets, on a $(2!)^3 = 8$ profils des préférences différents.

$$\left\{\begin{matrix} xy \\ xy \\ xy \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} xy \\ xy \\ yx \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} xy \\ yx \\ xy \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} yx \\ xy \\ xy \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} yx \\ yx \\ xy \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} yx \\ xy \\ yx \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} xy \\ yx \\ yx \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} yx \\ yx \\ yx \end{matrix}\right.$$

Notons que si des indifférences sont possibles, le nombre de profils, ceteris paribus, s’élargit.

Revenons au cas de trois projets et de trois individus. Si des indifférences sont possibles, il n’y a pas 6 mais 13 ordres individuels possibles, à savoir :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x	x	y	y	z	z	x~y	x~z	y~z	x	y	z	/
y	z	x	z	x	y	/	/	/	/	/	/	x y z
z	y	z	x	y	x	z	y	x	y~z	x~z	y~x	/

Partant, on peut avoir en tout 13^3=2.197 profils des préférences.[3] Bien évidemment, avec 3 individus, le profil des préférences ne sera qu’un de ces 2.197 combinaisons possibles.

4.4.4.8. Une remarque finale a titre d’avertissement

Notre raisonnement jusqu’ici et, sauf exception, par la suite dans cette section est totalement abstrait en ce sens que l’on ne donne pas un contenu précis aux projets. Cela permet de dégager des conclusions qui, à première vue, sont assez générales.

---

1 Avec 3 projets et 3 votants, chaque projet doit occuper une place différente dans les trois ordres individuels, donc être une fois premier, une fois deuxième et une fois troisième.

2 La probabilité d’un cycle augmente, ceteris paribus, légèrement avec le nombre de votants, mais elle augmente, ceteris paribus, très fortement avec le nombre de projets.

3 S’il y a quatre individus, le nombre de profils passe à 13^4=28.561. Il suffit de quatre individus et quatre projets, pour qu’en présence de la possibilité d’indifférence, il y a plus de 6 millions de profils possibles.

A y regarder de plus près, cette généralité peut toutefois être trompeuse, étant donné qu'il ne faut pas l'interpréter comme étant robuste au sens que, peu importe le contenu du projet, les résultats trouvés s'appliqueraient en règle générale.

Si les résultats sont très abstraits, cela ne veut donc pas forcément dire général au sens qu'ils soient robustes en relation avec un grand nombre de cas concrets différents.

Au contraire, une fois que l'on analyse des cas concrets, la probabilité que le résultat abstrait se dégage diminue.

Pour illustrer cet avertissement, considérons le profil des préférences ci-après :

A	x	>	y	>	z
B	y	>	z	>	x
C	z	>	x	>	y

et où x est un système public de santé, y est une médecine purement privée et z est une médecine mixte.

La personne A qui préfère le système public, appelons-la « *socialiste* ».

La personne 2, qui préfère la médecine privée, appelons-la libérale et la personne 3, qui préfère le système mixte, appelons-la chrétien-démocrate.

Toutefois, il n'est pas très plausible que quelqu'un qui comme A a une préférence absolue pour la médecine publique, par ailleurs, préfèrerait la médecine privée à une médecine mixte.

Autrement dit, le profil des préférences ci-dessus, qui renferme le paradoxe d'Arrow-Condorcet, est en pratique pour la problématique en question peu probable, puisqu'il est peu plausible (mais il est vrai, pas exclu) que l'individu A ait l'ordre des préférences individuels x y z, l'ordre x z y étant beaucoup plus probable en relation avec son « *background idéologique* ».

Donc, sous la problématique concrète sous analyse, le profil des préférences ci-après est plus réaliste :

A	x	>	z	>	y
B	y	>	z	>	x
C	z	>	x	>	y

Dans ce cas, il y a un Condorcet winner qui est z, la médecine mixte, le Condorcet winner étant également le Borda winner.

Analysez vous-mêmes ce qui se passerait si on avait :

A	x	>	z	>	y
B	y	>	z	>	x
C	z	>	y	>	x

Que pouvez-vous en conclure ?[1]

Terminons ces considérations par l'exemple suivant qui, tout en illustrant le fait que la problématique spécifique sur et par rapport à laquelle se définissent les préférences peut relativiser les considérations horizontales et théoriques sur la base d'ordres de préférences individuelles abstraites, et qui met en évidence la problématique importante, dont on parlera plus tard, du vote stratégique.

Supposons qu'il y ait lieu de décider si oui ou non un projet de loi est adopté et, plus précisément, qu'un projet de loi initial est proposé et qu'un amendement à ce projet est proposé par après lors des travaux parlementaires.

Les membres d'une Assemblée législative doivent dès lors décider entre adopter le projet initial, adopter le projet amendé ou n'adopter aucun projet.

Admettons que procéduralement l'on soumet d'abord au vote la décision s'il y a lieu de soumettre in fine à l'Assemblée le projet de loi (P) ou le projet de loi amendé (PA).

Le profil des préférences des votants, au nombre de 70, est (S est le rejet au statu quo) :

30	S	P	PA
20	P	PA	S
20	PA	S	P

Force est de constater que si les trois projets étaient simultanément soumis au vote, il n'y aurait de majorité absolue pour aucun mais une majorité (simple) pour le statu quo (S).

Si on oppose cependant tout d'abord le projet de loi initial et le projet de loi amendé, c'est le projet initial qui est retenu et ceci à la majorité absolue.

Si maintenant au deuxième tour, on soumet au vote ledit projet, le choix étant entre le voter ou le rejeter en votant contre, une majorité vote contre. Autrement dit, le statu quo est préféré au projet de loi en question.

Ceci dit, il importe de noter que le groupe des votants II classe le statu quo en dernière position. Il pourrait dès lors avoir intérêt à ne pas voter sincèrement au premier tour pour voter le projet PA au lieu du projet M qu'il classe en première position.

En effet, la conséquence serait que PA emporterait le premier tour. PA serait alors soumis au vote final et obtiendrait une majorité absolue. Pour le groupe II, ce serait une amélioration. En effet, s'il préfère avant tout P, il préfère néanmoins que sorte PA plutôt que S.

---

[1] Nous n'avons pas retrouvé la source de cet exemple.

4.4.5. Exemple 5

Soit le profil des préférences suivant pour 5 votants et 3 projets.

Groupe I	3	x	y	z
Groupe II	2	y	z	x

Il y a deux groupes de votants. Le groupe I est composé de 3 votants ayant chacun le même ordre des préférences, à savoir x y z. Le groupe II est composé de 2 votants qui ont chacun les mêmes préférences, à savoir y z x.

4.4.5.1. Majorite simple

C'est le projet x qui, avec les 3 voix des votants du groupe II, recueille la majorité simple (qui en l'occurrence est également une majorité absolue), le projet y en recueillant 2 et le projet z n'en recueillant aucune.

Rappelons que si un projet gagne à la majorité absolue, il gagne en toute logique également à la majorité simple, l'inverse n'étant toutefois pas vrai.

Qui plus est, un projet qui gagne à la majorité absolue est également le Condorcet winner, mais pas forcément le Borda winner comme on le verra.

Finalement, notons que l'ordre collectif donné par la majorité simple est x y z.

4.4.5.2. Methode de Condorcet

En opposant deux à deux les trois projets, on obtient :

x	y	x	z	y	z
(3)	(2)	(3)	(2)	(3+2)	(0)
x		x		y	

Il existe un Condorcet winner, à savoir le projet x. Le Condorcet loser est le projet z.

Dans ce contexte, on peut souligner que si un projet l'emporte à la majorité absolue, ce projet est forcément aussi le Condorcet winner.

L'ordre collectif donné par la méthode de Condorcet est x y z.

4.4.5.3. METHODE DE BORDA

La méthode de Borda donne

x	y	z
$3{\cdot}2$	$3{\cdot}1$	$3{\cdot}0$
$2{\cdot}0$	$2{\cdot}2$	$2{\cdot}1$
6	7	2

C'est le projet y qui sort gagnant, obtenant le plus de voix, à savoir 7 sur 15, soit 40% des voix.

L'ordre collectif donné par la méthode de Borda est y x z.

Le projet z est aussi bien le Condorcet loser que le Borda loser.

Cet ordre collectif ne se retrouve au niveau d'aucun ordre individuel des votants.

Pour faire ressortir la différence entre la méthode de Condorcet et la méthode de Borda, présentons le profil des préférences comme suit :

	x	y	z
nombre 1er rang	3	2	0
nombre 2^{ième} rang	0	3	2
nombre dernier rang	2	0	3

Cette présentation, intuitivement, montre la différence entre la méthode de Condorcet et la méthode de Borda, la première retenant le projet x et la deuxième le projet y.

La matrice de vote est :

	x	y	z	Total	Score Copeland
x	/	3	3	6	2
y	2	/	5	7	0
z	2	0	/	2	-2

Le core se réduit au projet x.

4.4.5.4. CONCLUSION

	MS	MC	MB
choix	x	x	y
ordre	x y z	x y z	y x z

La majorité simple et la méthode de Condorcet aboutissent au même résultat, le projet x. Par contre, la méthode de Borda déclare gagnant le projet y.

Le fait que les méthodes de Borda et de Condorcet ne coïncident pas forcément tient à la différence entre leurs logiques inhérentes. Notons que le Borda loser est également le Condorcet loser.

Pour avoir une première idée du pourquoi de la différence entre les deux méthodes au niveau des résultats, constatons que les deux votants du groupe II qui préfèrent y rejettent x avec plus d' « *intensité* » que les votants du groupe III qui préfèrent x ne rejettent y.

Le projet x est le résultat le plus mauvais possible pour $\frac{2}{5}$ = 40% des votants tandis que le projet y n'est pour aucun des votants le résultat le plus mauvais car pour tous les votants, le projet y est soit le premier, soit le deuxième choix, mais jamais le dernier.

La méthode de Borda, elle tient compte de ces dernières informations et dégage gagnant le projet y tandis que la méthode de Condorcet en fait abstraction.

Cette information relative à ce que l'on a appelé de façon quelque peu impropre « intensité » repose en fait sur le rang du projet z. Analysons ce qui se passerait si on n'avait pas ce projet z.

On aurait alors le profil des préférences suivant qui se distinguerait du profil initial par le fait précisément que le projet z serait supprimé :

Groupe I	3	x	y
Groupe II	2	y	x

Avec un tel profil, non seulement la majorité simple et la méthode de Condorcet, mais également la méthode de Borda dégageraient le projet x.

Nous voyons donc que c'est la présence du projet z qui joue un rôle clé dans l'explication que le Condorcet winner et le Borda winner diffèrent dans le contexte du profil des préférences initial portant sur les trois projets x, y et z.

Pourquoi ? Pour le voir, partons des préférences en l'absence de z et réintégrons le projet z.

En ajoutant le projet z au dernier rang des préférences du groupe I, x y <u>z</u> et en l'intercalant entre y et x dans le groupe II, y <u>z</u> x, on a creusé pour les deux votants du groupe II la différence de rang, et donc des votes Borda, entre y et x tandis que pour les votants du groupe I, la différence de rang entre x et y n'est pas affectée, parce que z est classé en dernière place de leurs préférences individuelles.

Autrement dit, dans le groupe II, le projet y ne devance plus un projet, le projet x, mais deux projets dans l'ordre, les projets z et x.

Il s'ensuit que le projet x, tout en restant le Condorcet winner en présence de z, aura toutefois moins de voix sous le régime de la méthode de Borda que le projet y.

Reprenons maintenant le profil de départ et changeons pour le groupe 2 les ordres individuels en renversant les rangs de z et x pour obtenir :

3	x	y	z
2	y	x	z

Force est de constater que maintenant la méthode de Borda donne l'ordre collectif x y z.

Reprenons le profil des préférences de départ :

3	x	y	z
2	y	z	x

ainsi que le profil obtenu en 'éliminant' le projet z :

3	x	y
2	y	x

et le profil obtenu en inter-changeant dans le deuxième groupe x et z :

3	x	y	z
2	y	x	z

Pour les deux derniers profils, la relation entre x et y, dans le chef des différents votants, n'a pas changé, les trois premiers dans chaque profil classent x avant y et les deux autres dans chaque profil classent y avant x.

Toutefois, avec la méthode de Borda, l'ordre collectif pour le premier profil est y x z et pour les deuxième et troisième profils, il devient respectivement x y et x y z.

Donc, le rang collectif entre x et y change en passant du premier à l'un des deux autres profils même si absolument rien n'a changé quant au rang entre x et y sur le plan des préférences individuelles de chacun des cinq votants.

Cet exemple montre que la méthode de Borda ne satisfait pas une condition (propriété) appelée dans la littérature « *condition de l'indépendance des alternatives non pertinentes* ».

Cette condition se définit comme suit : une procédure de choix est dite satisfaire le critère (la condition, la propriété) de l'indépendance des alternatives non pertinentes (« *independence of irrelevant alternatives* ») si pour chaque pair de projets α,β de la liste des projets au choix, on a que si α est préféré à β, cette relation ne devrait pas changer si un votant changeait ses (plusieurs votants changeant leurs) préférences quant à n'importe lequel des autres projets de la liste des projets au choix si plusieurs votants le faisaient.[1]

4.4.5.5. APPROCHE INTUITIVE

Les méthodes de Condorcet et de Borda ne vont pas sans poser un problème de compréhension intuitive quant à la logique sous-jacente de chacune et, surtout, quant à ce qui les distingue.

Tel est même le cas, contrairement à ce que l'on pourrait penser, pour la majorité simple, point sur lequel on reviendra plus tard.

Afin de saisir le principe du critère de décision derrière chacune de ces deux méthodes de Borda et de Condorcet, développons un exemple-métaphore.

Supposons qu'il y ait 3 boxeurs. Appelons-les x, y et z. Ils participent à un tournoi où chaque boxeur va effectuer 5 combats contre chacun de ses 2 adversaires.

Les résultats de ces combats sont :

Pour les 5 combats entre x et y : x gagne 3 fois et y gagne 2 fois.

Pour les 5 combats entre x et z : x gagne 3 fois et z gagne 2 fois.

Pour les 5 combats entre y et z : y gagne 5 fois et z gagne 0 fois.

Il y a donc en tout 15 combats et chacun des boxeurs participe à 10 combats.

Le graphique ci-après résume ces résultats, les chiffres entre parenthèses indiquant le total de victoires de chaque boxeur (de chaque projet). Pour un projet donné, le nombre y associé est la somme des nombres associés aux flèches qui partent de ce projet en direction de tous les autres projets, une flèche indiquant le nombre de combats gagnés par le boxeur d'où part la flèche contre le boxeur où la flèche arrive.

---

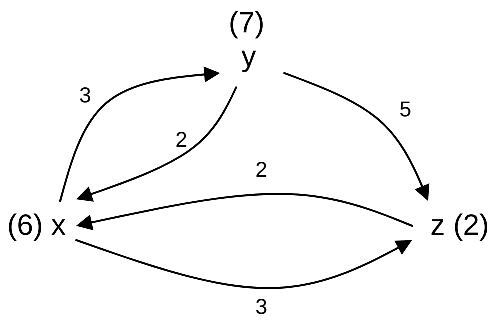
[1] Nous faisons abstraction des subtilités quant à la définition de la condition de l'indépendance des alternatives non pertinentes. Citons à ce sujet James S. Coleman, qui, dans son œuvre magistrale *Foundations of Social Theory*, Harvard University Press, 1990, note que (p. 348) : "*The most frequent way of illustrating independence from irrelevant alternatives is by considering addition or elimination of an alternative. This is not formally equivalent to a change in position of an alternative already in the set, because the set of alternatives changes. Nevertheless, the same anomalies arise*." G. Mackie note : "The condition of the independence of irrelevant alternatives is the condition most difficult to understand and the most frequently misunderstood." (Democracy defended, Cambridge, p. 81).
Donnons un autre exemple de cette condition. Supposons que le profil des préférences soit :

x y z t f
y x z t f

et qu'il change en :

x y z t f
y z t f x

Si cette condition est respectée, rien ne devrait changer quant à l'évaluation collective entre les projets x et y.



Donc, à titre d'exemple, le boxeur x gagne 6 combats, dont 3 contre y et 3 contre z.

La question est maintenant de déterminer qui gagne le tournoi?

Avant de chercher à y répondre, approchons le problème par la négative et interrogeons-nous si l'on peut dire quelque chose sur qui raisonnablement ne devrait pas gagner.

Sur ce plan, z est un candidat évident. Pourquoi ?

Mais z perd toujours contre y et gagne moins souvent contre x qu'il ne perd contre x. Pour le reste, z totalise un nombre de victoires, à savoir 2, inférieur au total de victoires de chacun des deux autres, à savoir 6 victoires pour x et 7 victoires pour y.

Une fois écarté z, qui devrait alors le remporter, x ou y ?

La réponse à cette question est beaucoup moins évidente.

En fait, a priori, on pourrait argumenter, avec de bonnes raisons, que x doit être déclaré gagnant mais, avec des raisons non pas moins bonnes, l'on pourrait également argumenter que c'est y qui devrait être déclaré gagnant.

Développons ces deux lignes de raisonnement ou approches.

Dans une première approche, l'on pourrait argumenter que x doit l'emporter, puisque x gagne plus souvent (3) qu'il ne perd contre y (2) <u>et</u> qu'il gagne plus souvent (3) qu'il ne perd contre z (2). De là, on pourrait conclure qu'il découle des confrontations individuelles respectives, que x est manifestement « *le plus fort* ». Il est plus fort que y et plus fort que z, et il devrait dès lors être le vainqueur du tournoi.

Selon une deuxième approche, on pourrait argumenter que y doit l'emporter puisque y avec 7 combats gagnés (sur 10) en gagne plus que x (qui n'en gagne que 6 sur 10) et en gagne plus que z (qui n'en gagne que 2 sur 10). Sur la base de ce constat, on pourrait conclure que le boxeur y est manifestement « *le plus fort* » car, pour un nombre de combats égal pour tous, il gagne plus souvent que n'importe quel autre de ses adversaires.

Selon l'approche que l'on choisit, le résultat diffère, et, au demeurant, véhicule deux définitions « *contradictoires* » mais per se raisonnables quant à la signification et conception de l'expression « *le plus fort* ».

A ce stade, vous avez probablement constaté que la première approche est représentative de la méthode de Condorcet et la deuxième de la méthode de Borda.

La méthode de Condorcet déclare gagnant le projet qui remporte les confrontations directes avec chacun des autres projets.

La méthode de Borda déclare gagnant le projet qui remporte plus de « *combats* » que n'importe quel autre projet.

Pour mieux appréhender la logique interne à chaque approche et la différence entre ces deux logiques, posons-nous deux questions qui sont le revers et l'avers d'une même médaille :

– pourquoi y ne gagne-t-il pas dans la première approche (méthode de Condorcet) ?

– pourquoi x ne gagne-t-il pas dans la deuxième approche (méthode de Borda) ?

Abordons la première question.

La première approche consiste à déclarer vainqueur le boxeur qui contre chacun des concurrents gagne plus souvent qu'il ne perd. Cela est x. Le boxeur x gagne plus souvent contre y (3 fois) qu'il ne perd contre y (2 fois) et il gagne plus souvent contre z (3 fois) qu'il ne perd contre z (2 fois). Cette approche précisément déclare gagnant le boxeur qui satisfait au critère du « *Condorcet winner* », en l'occurrence x.

Les résultats des combats respectivement entre x et z et y et z ne sont pas relevants dans la comparaison directe entre x et y tout comme n'est pas pris en compte l'ordre de grandeur de la majorité avec laquelle un projet perd ou gagne dans une confrontation bilatérale. L'ordre du résultat entre x et y ne dépend donc ni des relations de x avec z (des résultats des combats), ni des relations de y avec z tout comme l'ordre du résultat entre x et z ne dépend ni des relations de x avec y ni de celles de z avec y.

Passons à la deuxième question.

Le résultat des confrontations directes entre x et y se solde par une victoire de plus pour x.

Toutefois, contre z, y remporte 2 victoires de plus que x. Ces deux victoires de plus, selon cette approche, font plus que compenser, au bénéfice de y, le fait qu'il a une victoire en moins contre x.

Bref, le nombre total de victoires de y – de par son résultat sensiblement meilleur vis-à-vis de z – est supérieur au nombre de victoires de x, de par un score sensiblement moins bien que celui de y face à z.

Dans la méthode de Condorcet, ces « *informations* » relatives aux préférences respectives de x et y face au troisième projet z sont « *ignorées* ».

Force est de constater qu'aucune des deux approches n'est « *fausse* », elles sont tout simplement différentes parce qu'elles véhiculent deux conceptions différentes de ce que l'on peut entendre par « *le plus fort* ».

Si vous remplacez boxeurs par « *projet* », combat entre deux boxeurs par « *comparaison par le vote entre deux projets* » et match gagné par un boxeur par « *préférence et vote pour un projet par rapport à un autre projet* » vous allez saisir en qui les deux méthodes de vote de Borda et de Condorcet diffèrent.

Si on procède maintenant à ces substitutions et en se rappelant que

– x gagne 3 fois contre y et y gagne 2 fois contre x,

– x gagne 3 fois contre z et z gagne 2 fois contre x,

– y gagne 5 fois contre z et z gagne aucune fois contre y,

on peut exprimer ces résultats également comme suit en combinant les informations des trois tirets :

1. x gagne 3 fois contre y, y gagne 3 fois contre z et x gagne 3 fois contre z,

2. y gagne 2 fois contre z, z gagne 2 fois contre x et y gagne 2 fois contre x,

ce qui peut s'écrire en désagrégeant chacun des deux points :

1. 1.1 x gagne contre y, y gagne contre z et x gagne contre z
   1.2 x gagne contre y, y gagne contre z et x gagne contre z
   1.3 x gagne contre y, y gagne contre z et x gagne contre z

2. 2.1 y gagne contre z, z gagne contre x et y gagne contre x
   2.2 y gagne contre z, z gagne contre x et y gagne contre x

Si nous considérons que le point 1 représente 3 votants (1.1, 1.2 et 1.3) dont les préférences face à x, y et z sont identiques et égales à x > y, y > z et x > z, donc x > y > z, et que le point 2 représente 2 votants (2.1, 2.2) dont les préférences face à x, y et z sont identiques et égales à y > z, z > x et y > x, donc y > z > x, on obtient le profil des préférences pour 5 votants (3 + 2) devant choisir entre 3 projets.

Appelons les 3 premiers votants à préférences identiques groupe I et les 2 autres groupes II à préférences identiques, mais différentes de ceux du groupe I, ce profil des préférences est :

groupe I	3	x > y > z
groupe II	2	y > z > x

Force est de constater que nous retrouvons le profil des préférences de notre exemple 5 et compte tenu de notre analyse précédente, nous savons que le Condorcet winner est le projet x et que le Borda winner est le projet y.

Notons que si la méthode de Borda et la méthode de Condorcet, au niveau de la procédure pour dégager le gagnant, utilisent toutes les informations sur les préférences individuelles, tel n'est pas le cas au niveau de la définition du critère qui va emporter le vote.

Dans la méthode de Condorcet, certaines informations sont gommées. En opposant chaque fois un projet à un autre pour déterminer qui l'emporte, on fait abstraction, on ignore comment chacun de ces projets se comporte face aux autres projets.

Finalement et en nous rappelons certaines conclusions précédentes, l'on peut dire que la méthode de Borda utilise toutes les informations, la méthode de Condorcet en utilise moins mais toujours plus que la méthode de la majorité simple.

Ceci dit, et on y reviendra, l'on ne peut pas tirer, ipso facto et per se, de ce dernier constat, qui est un constat positif, le constat normatif que la méthode de Borda est préférable à la méthode de Condorcet. On ne peut pas dire qu'un plus en informations est toujours une condition nécessaire ou une condition suffisante à une efficience (accrue).

4.4.5.6. UNE QUESTION PLUS GENERALE

Supposons qu'il y ait en tout n votants et 3 projets x, y et z que l'on ait le profil suivant avec a+b=n et a>b :

a	x	y	z
b	y	z	x

Dans ce cas, le projet x est le majority winner et le Condorcet winner, puisque a>b, c.-à-d. $a > \frac{n}{2}$.

Qu'en est-il de la méthode de Borda, ou autrement, à quelle condition le projet x serait-il également le Borda winner ?

Pour que tel soit le cas, x devait avoir plus de voix Borda que y et que z.

Comme a>b, x en a plus que z, reste le projet y. Pour avoir plus de voix que y, il faut que 2a+0>a+2b, soit il faut que a>2b. Comme b=n-a, cela implique que a>2n-2a, soit 3a>2n, soit $a > \frac{2}{3}n$. Donc, si le nombre de votants a est tel que $a > \frac{2}{3}n$, alors x est également le Borda winner. Sinon, le projet y est le Borda winner.

De façon plus générale, soit m projets et n votants. Supposez qu'un projet p* est le majority et le Condorcet winner, c.-à-d. qu'il est classé a fois en première place avec $a > \frac{n}{2}$. On peut montrer que ce projet p* est également le Borda winner si on a que $\frac{a}{n} > 1 - \frac{1}{m}$. Pour ce faire, analysez le cas le moins favorable pour p*, c.-à-d. où p* figure a fois en première place et (n-a) fois au dernier rang d'un ordre individuel des préférences.

4.4.5.7.DEUX AUTRES EXEMPLES

4.4.5.7.1. Exemple 5A

Soit le profil des préférences suivant :

51	x	y	z
35	z	y	x
14	y	z	x

A la majorité, on obtient x z y.

Le Condorcet winner est x tandis que le Borda winner est le projet y. L'ordre collectif selon Borda est y x z.

Si maintenant on change pour les 14 votants du troisième groupe l'ordre de z par rapport à x sans changer le reste, on obtient :

51	x	y	z
35	z	y	x
14	y	x	z

Force est de constater que le projet x est toujours le Condorcet winner, mais que maintenant il est également le Borda winner.

4.4.5.7.2. Un deuxième exemple. Exemple 5B.

Soit le profil suivant :

Groupe I	3	b	a	c	d
Groupe II	3	b	a	d	c
Groupe III	3	a	c	d	b
Groupe IV	2	a	d	c	b

A la majorité simple, c'est le projet b qui l'emporte. Qui plus est, il l'emporte également à la majorité absolue. L'ordre collectif est b a c ~ d.

Il en résulte que le projet b est également le Condorcet winner. L’ordre collectif est b a c d.

Selon la méthode de Borda, on obtient :

a	b	c	d
3·2	3·3	3·1	3·0
3·2	3·3	3·0	3·1
3·3	3·0	3·2	3·1
2·3	2·0	2·1	2·2
27	18	11	10

C’est le projet a qui l’emporte avec une avance significative. L’ordre collectif est a b c d.

Notons que le projet a est placé 5 fois au premier rang et 6 fois au deuxième. Le projet b est placé une fois de plus au premier rang, 6 fois et 5 fois au denier rang.[1]

4.4.5.7.3. Exemple 5C

Soit le profil des préférences suivant :

6	b	a	c	d
3	a	c	d	b
2	a	d	c	b

Le majority et le Condorcet winner sont le projet b, même s’il est placé par 5 votants au dernier rang.

Le projet a occupe le premier rang une fois de moins que b tout en étant dans chaque autre cas placé en deuxième place.

Le projet a est le Borda winner.

4.4.6. Exemple 6

Soit le profil des préférences suivant se dégageant des préférences individuelles de 81 votants par rapport à 3 projets, les votants appartenant à un groupe ayant chacun le même profil des préférences :

Groupe I	30	x	y	z
Groupe II	3	x	z	y
Groupe III	25	y	x	z

[1] exemple repris de Riker.

Groupe IV	14	y	z	x
Groupe V	9	z	x	y
	81			

A titre d'exemple, le groupe III est composé de 25 votants, chacun de ceux-ci ayant le même profil des préférences, à savoir y x z.

4.4.6.1. MAJORITE SIMPLE

Sur la base du critère de la majorité simple, c'est le projet y qui l'emporte avec 39 voix (provenant des 25 votants constituant le groupe III et des 14 votants constituant le groupe IV) contre 33 voix pour le projet x (provenant des 30 votants du groupe I et des 3 votants du groupe II) et 23 voix pour le projet z (14 voix du groupe IV et 9 du groupe V). Notons que le projet y n'a pas la majorité absolue.

L'ordre collectif, avec la majorité simple, est y x z.

4.4.6.2. METHODE DE CONDORCET

Les confrontations deux à deux donnent :

x	y	x	z	y	z
(30+3+9)	(25+14)	(30+3+25)	(14+9)	(30+25+14)	(3+9)
x		x		y	

Comme x l'emporte aussi bien face à y que face à z, il est le Condorcet winner. Le Condorcet loser est z puisque z perd à la fois face à x et face à y.

L'ordre collectif, avec la méthode Condorcet, est x y z.

4.4.6.3. METHODE DE BORDA

Quant à la méthode de Borda, notant tout d'abord que comme il y a 81 votants par rapport à 3 projets, il y a en tout 81·(2+1+0) = 243 voix.

x	y	z
30·2	30·1	30·0
3·2	3·0	3·1
25·1	25·2	25·0
14·0	14·2	14·1
9·1	9·0	9·2
100	108	35

C'est le projet y qui l'emporte. Rappelons que la méthode de Borda assure que le Condorcet loser, en l'occurrence ici z, n'est jamais le Borda winner.

L'ordre collectif, avec la méthode de Borda, est y x z.

L'outranking matrice est :

	x	y	z	Total	Score Copeland
x	/	42	58	100	2
y	39	/	69	108	0
z	23	12	/	35	-2

4.4.6.4. CONCLUSION

En résumé :

	MS	MC	MB
choix	y	x	y
ordre	y x z	x y z	y x z

Force est de constater que la majorité simple et Borda donnent cette fois-ci le même résultat, le projet y tandis qu'avec la méthode de Condorcet, c'est le projet x qui l'emporte.

Notons que le même projet est à la fois le Borda loser et le Condorcet loser tandis que le Borda winner est différent du Condorcet winner.

4.4.7. Le paradoxe de Borda

4.4.7.1. EXEMPLE 7A

Soit le profit des préférences ci-après (7 votants par rapport à 3 projets, les votants appartenant à un groupe ayant le même profil des préférences) :

Groupe I	3	x	y	z
Groupe II	2	y	z	x
Groupe III	2	z	y	x
	7			

4.4.7.1.1. Majorité simple

Sur la base du critère de la majorité simple, c'est x qui recueille le plus de voix, à savoir 3 voix contre 2 voix pour y et 2 voix pour z.

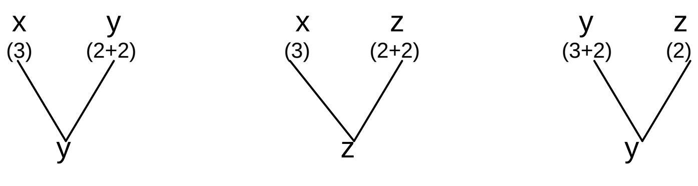
L'ordre collectif est x y z.

Il importe de noter qu'une majorité, même absolue, place le projet x au dernier rang, autrement dit aurait préféré que gagne un autre projet.[1]

Qui plus est, on le verra au point suivant, face à un choix entre x et y, une majorité préférerait y et face à un choix entre x et z, une majorité préférerait z.

4.4.7.1.2. La méthode de Condorcet

La méthode de Condorcet donne :



Il existe un Condorcet winner, à savoir le projet y.

Notons, et comme on le relèvera ci-après, cela importe plus particulièrement dans cet exemple, que le Condorcet loser est le projet x qui pourtant l'emporte à la majorité simple.

L'ordre collectif est y z x. Le Condorcet loser est le projet x.

[1] Supposez que l'on aurait appliqué ce que l'on appelle l' « *antiplurality vote* », c'est-à-dire où chacun devrait « *voter* » pour le projet qu'il préfère le moins et que le projet gagnant serait celui qui obtiendrait le moins de votes. Montrez qu'avec cette méthode de vote, le projet gagnant serait le projet y.

4.4.7.1.3. La méthode de Borda

Avec la méthode de Borda, on obtient

x	y	z
3·2	3·1	3·0
2·0	2·2	2·1
2·0	2·1	2·2
6	9	6

C'est le projet y qui l'emporte.

L'ordre collectif est y z~x. Ce résultat illustre qu'il peut y avoir un ex aequo sur le plan collectif.

L'outranking matrice est :

	x	y	z	Total	Score Copeland	nombre de 1[ières] places
x	/	3	3	6	-2	3
y	4	/	5	9	2	2
z	4	2	/	6	0	2

4.4.7.1.4. Conclusion

En résumé :

	MS	MC	MB
choix	x	y	y
ordre	x y z	y z x	y z ~ x

La majorité simple (pluralité) dégage comme projet gagnant le projet x tandis que les méthodes de Borda et de Condorcet dans cet exemple coïncident de nouveau, dégageant chacune le projet y.

Il importe de constater que le projet qui l'emporte sous la majorité simple, à savoir x, non seulement est rejeté par Condorcet et Borda, mais est, de surcroît, le Condorcet loser, c'est-à-dire le projet qui ne recueille ni une majorité face à y, ni une majorité face à z (le boxeur qui perd plus qu'il ne gagne contre le boxeur y et perd plus qu'il ne gagne contre le boxeur z).

Ce phénomène où un projet gagne en appliquant la majorité simple tout en perdant face à tous les autres projets avec la méthode de Condorcet, c'est-à-dire où le Condorcet loser gagne à la majorité absolue, est appelé le paradoxe de Borda.[1]

Autrement dit, cet exemple nous montre qu'il n'est pas possible de toujours satisfaire simultanément les deux conditions (i) et (ii) ci-après :

(i) devrait être élu le projet qui obtient plus de voix que tout autre projet ;

(ii) ne devrait pas être élu le projet qui perdrait chacune de ses confrontations bilatérales, c.-à-d. avec chacun des autres projets.

4.4.7.2. Analyse intuitive

Pour mieux saisir ce qui distingue la majorité simple de la méthode de Condorcet (et de celle de Borda), reprenons notre exemple métaphore du tournoi de boxe.

Supposons cette fois-ci qu'il y ait trois boxeurs, x, y et z. Chaque boxeur fait 7 combats contre chacun des deux autres. Un boxeur fait donc 14 combats. En tout, il y a 21 combats dans le tournoi (7 combats (x,y), 7 combats (x,z) et 7 combats (y,z)).

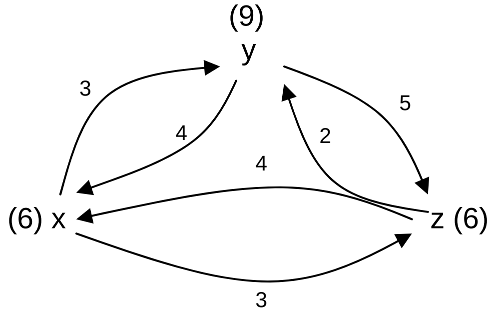
On suppose que les résultats sont :

– Dans les 7 combats entre x et y, x gagne 3 fois contre y et y gagne 4 fois contre x.

– Dans les 7 combats entre x et z, x gagne 3 fois contre z et z gagne 4 fois contre x.

– Dans les 7 combats entre y et z, y gagne 5 fois contre z et z gagne 2 fois contre y.

Graphiquement, cela donne :



Avec la méthode de Condorcet, c'est y qui l'emporte. En effet, y gagne plus de combats (4) qu'il n'en perd (3) contre x <u>et</u> gagne plus de combats (5) qu'il n'en perd (2) contre z.

[1] appelé tel quel parce que Borda a été le premier à identifier ce résultat. Attention, il ne s'agit donc pas d'un paradoxe de la méthode de Borda.

Avec la méthode de Borda, c'est également y qui l'emporte car y gagne plus de combats (7) que z (6) et que x (6).

Quelle pourrait être l'analogie dans notre exemple avec la méthode de la majorité simple, autrement dit, existe-t-il une approche déterminant le gagnant du tournoi que l'on pourrait considérer correspondre à la majorité simple ?

On pourrait estimer que le boxeur qui devrait gagner le tournoi ne devrait pas être celui qui gagne plus souvent qu'il ne perd contre chacun des autres boxeurs (le critère correspondant à la méthode de Condorcet), ni le boxeur qui tout simplement gagne plus de combats – peu importe comment se compose ce total de victoires – que chacun des autres boxeurs (le critère correspondant à la méthode de Borda), mais que le boxeur qui devrait gagner est celui qui peut totaliser le plus d'ordres cohérents de combats gagnés, un ordre cohérent de combats gagnés pour un boxeur donné A étant une situation où ce boxeur A gagne contre un deuxième boxeur B, que ce deuxième boxeur B gagne contre le troisième boxeur C et où le boxeur A, lui, gagne contre le troisième boxeur C.

Donc, un ordre de victoires cohérent pour un boxeur, disons x, serait soit un combat gagné contre y, avec y qui gagne contre z et lui qui gagne contre z, soit un combat gagné contre z, z gagnant contre y et lui gagnant contre y.

Autrement dit, une telle suite, on pourrait l'exprimer en disant que x est plus fort que y, y (z) est plus fort que z (y) et que x est plus fort que z (y). On retrouve ici l'idée de la transitivité, non pas comme hypothèse de départ, mais comme <u>critère</u> de résultat.

Le boxeur qui, selon cette approche, gagnerait finalement le tournoi serait celui qui totalisera le plus de tels ordres cohérents (transitifs) de victoires.

Continuons notre exemple dans cet état d'esprit.

Les résultats, tels qu'exposés ci-dessus, peuvent également se réécrire comme suit :

– x gagne 3 fois contre y, y gagne 3 fois contre z et x gagne 3 fois contre z ;

– y gagne 2 fois contre z, z gagne 2 fois contre x et y gagne 2 fois contre x ;

– z gagne 2 fois contre y, y gagne 2 fois contre z et z gagne 2 fois contre x ;

ou, de façon désagrégée :

1. 1.1 x gagne contre y, y gagne contre z et x gagne contrez ;
   1.2. x gagne contre y, y gagne contre z et x gagne contre z ;
   1.3. x gagne contre y, y gagne contre z et x gagne contre z ;

2. 2.1 y gagne contre z, z gagne contre x et y gagne contre x ;
   2.2 y gagne contre z, z gagne contre x et y gagne contre x ;

3. 3.1 z gagne contre y, y gagne contre x et z gagne contre x ;
   3.2. z gagne contre y, y gagne contre x et z gagne contre x.

Si on considère que le point 1 rassemble 3 votants (1.1, 1.2, 1.3) dont les « *préférences* » sont x > y > z, que le point 2 rassemble 2 votants (2.1, 2.2) dont les « *préférences* » sont y > z > x et que le point 3 rassemble 2 votants (3.1, 3.2) dont les « *préférences* » sont z > y > x, on obtient le profil des préférences ci-après, après avoir regroupé ces trois ensembles de votants respectivement dans les groupes I, II et III :

Groupe I	3	x	y	z
Groupe II	2	y	z	x
Groupe III	2	z	y	x

Force est de constater que nous avons retrouvé notre profil des préférences initial.

Ce développement a montré que si l'exécution du vote à la majorité simple est un jeu d'enfants dans la mesure où il suffit de regarder les premiers rangs des préférences individuelles et de totaliser pour chaque projet le nombre de fois qu'il occupe le premier rang, l'intuition derrière cette méthode « *simple* » est sensiblement plus subtile qu'elle n'apparaît a priori.

4.4.7.3. Un autre exemple. Exemple 7B.

Refaites le raisonnement avec le profil suivant :

Groupe I	3	x	y	z
Groupe II	2	x	z	y
Groupe III	2	y	z	x
Groupe IV	4	z	y	x

et montrez que la majorité simple donne le projet x, et les méthodes de Borda et de Condorcet le projet z. Le projet x qui gagne à la majorité simple est à la fois le Condorcet loser et le Borda loser.

Notons par ailleurs qu'un vote qui consisterait à ce que chacun puisse donner une voix à deux projets différents, dégagerait le projet y :

x	y	z
3	3	0
2	0	2
0	2	2
0	4	4
5	9	8

On aurait le même résultat si chacun devait donner une voix au projet qu'il préfère le moins et que gagnerait alors le projet qui a le moins de voix :

x	y	z
0	0	3
0	2	0
2	0	0
4	0	0
6	2	3

Si on retenait dans un premier tour les deux projets qui avaient le plus de voix, on retiendrait x et z et en confrontant x à z, ce serait le projet z qui le reporterait.

4.4.7.4. EXEMPLE 7C

Soit le profil des préférences suivant :

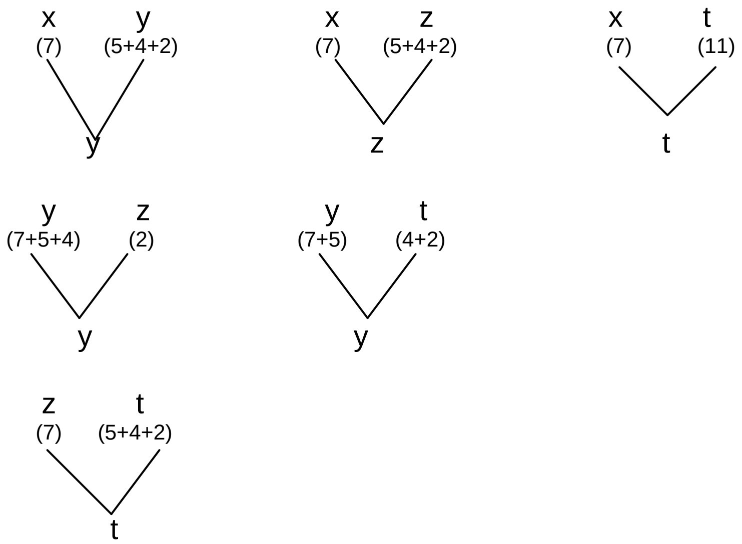
Groupe I	7	x	y	z	t
Groupe II	5	y	t	z	x
Groupe III	4	t	y	z	x
Groupe IV	2	t	z	y	x
	18				

4.4.7.4.1 Majorité simple

Le projet x l'emporte sous l'égide de la majorité simple obtenant 7 voix (quelque 39% des voix), contre 6 pour z, 5 pour y et aucune pour t. L'ordre collectif est x t y z.

4.4.7.4.2. Méthode de Condorcet

La méthode de Condorcet donne :



C’est le projet y qui est le Condorcet winner puisque y est préféré à la majorité simple à tous les autres projets, x, z et t dans les trois votes deux à deux (y,z), (y,x) et (y,t).

Le Condorcet loser est le projet qui remporte un scrutin à la majorité, le projet x.

L’ordre collectif est y t z x.

4.4.7.4.3. Méthode de Borda

Avec la méthode de Borda, on obtient :

	x	y	z	t
Groupe I	7·3	7·2	7·1	7·0
Groupe II	5·0	5·3	5·1	5·2
Groupe III	4·0	4·2	4·1	4·3
Groupe IV	2·0	2·1	2·2	2·3
	21	39	20	28

C’est le projet y qui est le Borda winner. Le Borda loser est le projet z. Le Condorcet loser est le projet x. Cet exemple montre donc par ailleurs que Condorcet loser et Borda loser ne sont pas forcément les mêmes.

L’ordre collectif est y t x z.

4.4.7.4.4. Conclusion

En résumé :

	MS	MC	MB
choix	x	y	y
ordre	x z y t	y t z x	y t x z

Les méthodes de Condorcet et de Borda dégagent le même résultat, à savoir le projet y qui revête donc la double caractéristique d'être à la fois le Borda winner et le Condorcet winner, tandis que la majorité simple donne le projet x, qui est, par ailleurs, le Condorcet loser. Le Borda loser est le projet z. Les trois méthodes donnent chacune un ordre collectif différent.

De plus, on constate que 11 votants rangent le projet x à la dernière place de leurs préférences, c'est-à-dire qu'il y a une majorité absolue de votants (11 voix sur 18, soit quelque 61%) qui est « *farouchement* » contre x.

4.4.7.5. Exemple 7D

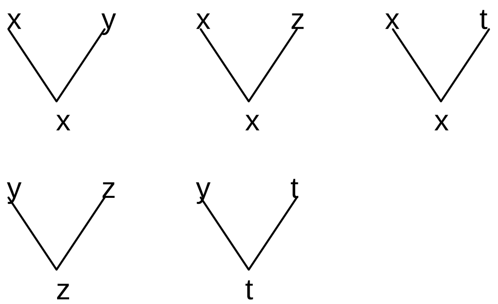
Soit le profil suivant pour 7 votants et 4 projets :

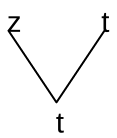
3	y	x	t	z
2	z	x	t	y
2	t	x	z	y

4.4.7.5.1. Majorité simple

Le projet y l'emporte avec 3 voix contre chaque fois 2 voix aux projets z et t et aucune pour le projet x.

4.4.7.5.2. Méthode de Condorcet





C’est le projet x qui est le Condorcet winner. Le Condorcet loser est le projet y.

4.4.7.5.3. Méthode de Borda

On obtient :

x	y	z	t
3·2	3·3	3·0	3·1
2·2	2·0	2·3	2·1
2·2	2·0	2·1	2·3
14	9	8	11

Le projet x est le Borda winner. Le projet z est le Borda loser.

4.4.7.5.4 Conclusion

En résumé :

	MS	MC	MB
choix	y	x	x
ordre	y>z~t>x	x>z>t>y	x>t>y>z

Si la majorité simple dégage le projet y, force est de constater qu’une majorité des votants place le projet y en dernière place de leurs préférences. De surcroît, comme le projet y n’a pas une majorité absolue, il existe une majorité absolue des votants qui auraient préféré que gagne un autre projet que y.

Le projet x est le Condorcet et le Borda winner. Le Condorcet loser et le Borda loser sont deux projets différents, à savoir respectivement x et z.

On remarque, comme l’illustre cet exemple, qu’un projet peut être le Borda winner et le Condorcet winner sans jamais occuper le premier rang dans l’un des ordres de préférences individuelles.

4.4.7.6. EXEMPLE 7E

Soit le profil suivant :

11	x	y	z	t
10	t	y	z	x
9	z	y	t	x

Le majority winner est le projet x. Le Condorcet winner et le Borda winner sont identiques, à savoir le projet y.

Notons que le projet y n'occupe jamais le premier rang d'un des ordres individuels.

4.4.7.7. EXEMPLE 7F

Soit le profil ci-après :

2	a	b	c	d
1	a	c	d	b
2	a	d	c	b
2	c	b	d	a
3	d	b	c	a

La matrice des votes est :

	a	b	c	d	Total	Score Copeland	Nombre 1ières places
a	/	5	5	5	15	0	4
b	5	/	5	4	14	-1	0
c	5	5	/	5	15	0	2
d	5	6	5	/	16	1	3

Le projet a est le majority winner. Le projet d est le Borda winner. Il n'y a pas de Condorcet winner.

Si chacun peut voter pour deux projets, c'est le projet B qui l'emporte.

Si chacun peut voter pour trois projets, c'est le projet c qui l'emporte.

4.4.7.8. APPLICATIONS

4.4.7.8.1. Une première application

Soit un club de 7 personnes. On vous demande d'aller acheter des pizzas, une pour chaque membre. Il y a 3 sortes de pizzas, pizza jambon (J), pizza saucisse (S) et pizza champignons (C). Vous ne pouvez acheter qu'un type de pizza.

Vous connaissez le profil des préférences des 7 membres :

3	J	S	C
2	S	C	J
2	C	S	J

Si vous appliquez le critère de la majorité simple, vous achetez des pizzas jambon. Dans ce cas, vous risquez que 4 membres se plaignent en disant qu'ils auraient préféré une autre pizza et, qui plus est, sont unanimement d'accord de dire qu'ils auraient préféré une pizza saucisse à la pizza jambon que vous achetez ou qu'ils auraient préféré une pizza champignons à une pizza jambon.

Si vous appliquez le critère de Condorcet, vous constatez qu'une majorité préfère la pizza saucisse à la pizza jambon et la pizza saucisse à la pizza champignon.

Si vous achetez la pizza saucisse, vous risquez qu'il y ait 5 membres qui se plaignent en disant qu'ils auraient préféré une autre pizza et de façon plus précise, 3, dont la majorité simple des membres du club, disant qu'ils auraient préféré une pizza jambon et 2 disant qu'ils auraient préféré une pizza champignon.

On constate de surcroît que la pizza jambon est le Condorcet loser car une majorité simple préfère la pizza saucisse à la pizza jambon et une majorité simple préfère la pizza champignon à la pizza jambon. En achetant sous le critère de la majorité simple une pizza jambon, vous avez donc acheté une pizza qui est le Condorcet loser.

Si vous appliquez la méthode de Borda, c'est de nouveau la pizza saucisse qui l'emporte avec le même problème que sous Condorcet. Notez que la pizza jambon se classe au dernier rang de la méthode de Borda.

Le choix de la méthode de vote détermine donc le résultat final.

4.4.7.8.2. Une deuxième application

Supposez que 13 personnes doivent choisir quelle boisson acheter pour une fête et qu'on ne peut acheter qu'un seul type de boisson.

Le profile des préférences est avec M = milk, W = wine et B = beer :

4	M	W	B
2	W	B	M
1	B	M	W

2	M	B	W
4	B	W	M

Si le critère de décision est la majorité simple, c'est M qui, avec 6 voix, sera acheté.

Si le critère de décision est la méthode de Condorcet, c'est B qui sera choisi.

Si le critère de décision est la méthode de Borda, c'est de nouveau B qui sera choisi.

Si le critère de décision était que chaque votant peut indiquer deux choix, c'est-à-dire donner à deux boissons une voix, ce qui reviendrait à écarter une boisson et que sera choisi la boisson qui aura le plus de voix, (donc une méthode de vote dont on n'a parlé jusqu'ici) on aura :

M	W	B
4·1	4·1	4·0
2·0	2·1	2·1
1·1	1·0	1·1
2·1	2·0	2·1
4·0	4·1	4·1
7	10	9

et le choix se portera dans cette méthode, appelée « *vote for two* » ou vote binominal sur W avec dans l'ordre W > B > M.

Donc, on aura :

M, si c'est la majorité simple ;

B, si c'est Condorcet ou Borda ;

W, si c'est le vote « *vote for two* ».

De nouveau, on voit que le choix de la méthode de vote peut influencer le résultat, ou autrement dit, on peut obtenir comme résultat n'importe laquelle des trois options, à condition de choisir parmi les méthodes de vote la méthode adéquate.

4.4.7.8.3 Une troisième application

Supposons que le corps électoral se compose à 45% d'électeurs qui préfèrent un candidat conservateur et à 55% d'électeurs qui préfèrent un candidat progressiste.

Si une élection se tient entre deux candidats, un conservateur et un progressiste, c'est ce dernier qui l'emporte avec 55% des voix contre 45% pour son concurrent conservateur.

Maintenant, supposons qu'il y ait trois candidats, un candidat conservateur (C), un candidat progressiste modéré (PM) et un candidat progressiste radical (PR).

Supposons que 25% des électeurs qui préfèrent un candidat progressiste, ont une préférence pour le progressiste radical et que 75% de ses électeurs préfèrent le progressiste modéré.

Si une élection se tient, le candidat conservateur recueillera 45% des voix, le candidat progressiste modéré 41,75% des voix (75% · 55%) et le candidat progressiste radical 13,75% des voix (25% · 55%). C'est donc cette fois-ci le candidat conservateur qui gagne les élections.[1]

L'explication est que le camp des progressistes, si chacun de ses électeurs vote conformément à ses préférences, sera divisé et que cette division est telle qu'elle joue en faveur du candidat conservateur, à la frustration de 55% du corps électoral, l'ensemble des électeurs progressistes, qui auraient préféré un candidat progressiste.

Un tel résultat se dégage si les préférences individuelles des électeurs et, partant, le profil des préférences se présente comme suit :

40%	C	>	PM	> PR
41,25%	PM	>	PR	> C
13,75%	PR	>	PM	> C

Ce profil est-il en l'occurrence possible ? Oui, si, premièrement, les électeurs conservateurs préfèrent un candidat conservateur et face à des candidats progressistes préfèrent celui qui est modéré à celui qui est radicale, si on suppose, deuxièmement, que les électeurs progressistes modérés préfèrent le candidat modéré au candidat radical et préfèrent le candidat progressiste radical au candidat conservateur et si on suppose finalement que les électeurs progressistes radicaux tout en préférant le candidat radical préfèrent un progressiste modéré à un conservateur.

Notons que si on appliquait les méthodes de Condorcet et de Borda, ce serait toujours le candidat progressiste modéré – celui qui se situe au centre du spectrum des préférences de notre exemple (il ne se classe jamais en dernière place)[2] – qui l'emporterait. Le résultat ne serait-il pas plus 'démocratique', car plus représentatif que le résultat dégagé avec un vote à la majorité ?[3]

---

[1] Cela ne vous rappelle-t-il pas, quant au principe, le résultat des élections françaises en 2002, où au premier tour le candidat socialiste Jospin a été éliminé.

[2] cf. la section 4.7. sur le théorème de Black. Les préférences de tous les votants sont uni-modales.

[3] cf. la section 4.5.6 pour une version différente.

4.4.8. Exemple 8

Soit le profil ci-après, composé de 3 votants et de 4 projets :

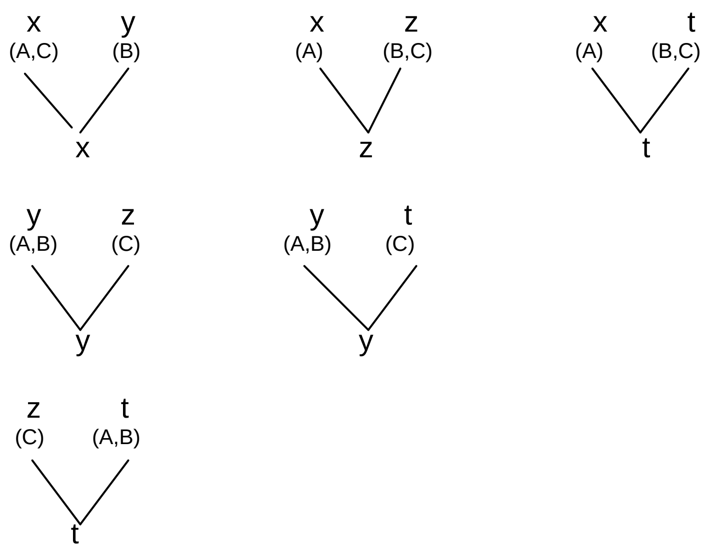
A	x	y	t	z
B	y	t	z	x
C	t	z	x	y

4.4.8.1. MAJORITE SIMPLE

Aucun projet ne recueille une majorité simple, les projets x, y et t recueillant chacun une voix, le projet z n'en recueillant aucune.

4.4.8.2. METHODE DE CONDORCET ET METHODE DE COPELAND

Les confrontations 2 à 2, donc par paires, des 4 projets, donc en tout les 6 confrontations possibles, donnent :



Il n'y a pas de Condorcet winner car chaque projet perd contre au moins un projet tout comme il n'y a pas de Condorcet loser puisque chaque projet gagne contre au moins contre un projet.[1]

---

[1] Notons que si la séquence commençait avec d'abord un vote entre y et t, y l'emporterait, avec ensuite un vote entre y et x, x l'emporterait, et avec finalement un vote entre x et z, z l'emporterait et serait le Condorcet winner, quoique chacun des votants préférerait t à z. Dans ce cas, le principe de Pareto serait violé.

Le tableau ci-après résume les voix qu'un projet (en ligne) obtient dans une contraction bilatérale contre le projet en colonne :

	x	y	z	t	Total	Score de Copeland
x	/	2	1	1	4	-1
y	1	/	2	2	5	1
z	2	1	/	0	3	-1
t	2	1	3	/	6	1

Pour être un Condorcet winner, en présence en tout de n projets, il faut l'emporter à la majorité dans chacune des n-1 confrontations bilatérales.

En l'occurrence, pour être un Condorcet winner, un projet devrait avoir un score de Copeland de 3. Il n'y a pas de tel projet.

Si par contre, on prend comme critère que le projet qui l'emporte est le projet dont le score de Copeland est le plus élevé, l'on constate que y et t se classent ex aequo. Donc, une telle méthode, dite méthode de Copeland, en l'occurrence, ne dégage pas non plus de projet gagnant. On verra par la suite des exemples où tel est le cas, c.-à-d. où il existe un projet qui, sans avoir le score de Copeland maximal possible et nécessaire pour être un Condorcet winner, a néanmoins un score de Copeland supérieur à tous les autres projets.

Si on définit l'ordre collectif comme un classement des projets en fonction du score de Copeland, on obtient y~t>z~x.

Le core est vide. Chaque projet perd au moins une de ses confrontations bilatérales.

4.4.8.3. METHODE DE BORDA

La méthode de Borda donne, chaque électeur ayant respectivement 3, 2, 1 et 0 voix à affecter aux 4 projets :

	x	y	z	t
A	3	2	0	1
B	0	3	1	2
C	1	0	2	3
	4	5	3	6

C'est le projet t qui l'emporte.

4.4.8.4. Conclusion

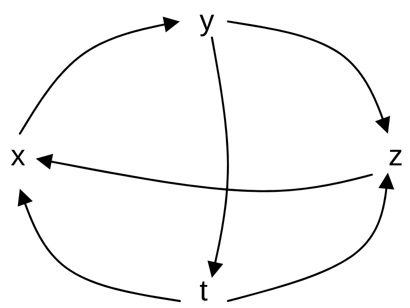
En résumé :

	MS	MC	MB
choix	-	-	t
ordre	x~y~t>z	y~t>x~z	t>y>x>z

Ni la majorité simple ni la méthode de Condorcet ne donnent un résultat. Par contre, avec la méthode de Borda on obtient un résultat, en l'occurrence le projet t.

Comment expliquer ce résultat ? Il n'y a pas de Condorcet winner, mais la méthode de Borda, elle donne un résultat. L'explication est que le profil tout en n'étant pas transitif, n'est cependant pas globalement cyclique.

Représentons les résultats de Condorcet :



Nous voyons qu'il n'existe pas de possibilité d'englober tous les 4 projets dans un cycle, mais que par contre il existe plusieurs cycles locaux au niveau de 3 des 4 projets. Aussi a-t-on les triplets cycliques x y z x et x y t x.

Montrons-le autrement en « *éliminant* » le projet t du profil des préférences pour ainsi obtenir :

x	y	z
y	z	x
z	x	y

Le projet t reste en dehors de ce cycle et c'est lui le Borda winner. Donc, malgré le fait que t, dans la confrontation directe avec y, perd, il l'emporte en termes de la méthode de Borda.

Mais notons aussi que si l'on élimine z, l'on obtient :

x	y	t
y	t	x
t	x	y

et on a une deuxième non transitivité sur le cycle local x y t.

4.4.8.5. Exemple 8a

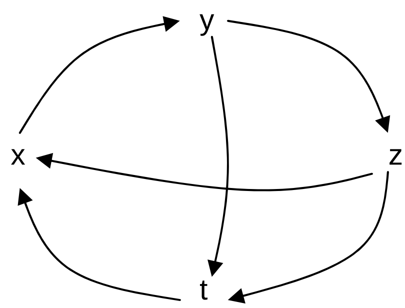
Faites l'exemple suivant :

x	y	z	t
y	z	t	x
z	t	x	y

Montrez qu'il n'existe pas de Condorcet winner et qu'il n'existe pas de Borda winner. Ici, il y a un cycle englobant les quatre projets.

La matrice des votes est :

	x	y	z	t	Total	Score Copeland
x	/	2	1	1	4	-1
y	1	/	2	2	5	1
z	2	1	/	3	5	1
t	2	1	0	/	3	-1



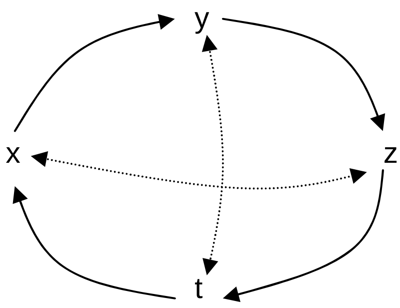
4.4.8.6. Exemple 8b[1]

Finalement, faites l'exemple suivant :

x	y	z	t
y	z	t	x
z	t	x	y
t	x	y	z

Cette fois-ci il y a de nouveau cyclicité et donc pas de Condorcet winner (une flèche pointillée orientée dans les deux directions indique que les projets en question obtiennent le même nombre de voix dans la méthode de Condorcet).

[1] Notez que l'on a ajouté un votant et un projet.



Construisons la matrice des votes :

	x	y	z	t	Total	Score Copeland
x	/	3	2	1	6	0
y	1	/	3	2	6	0
z	2	1	/	3	6	0
t	3	2	1	/	6	0

A titre d'exercice, analysez ce qui change si les préférences du quatrième votant ne sont pas t x y z mais t x z y, c'est-à-dire si les deux dernières positions sont interchangées.

4.4.8.7. Exemple 8c

Soit le profil des préférences suivant :

Groupe I	8	a	b	c
Groupe II	7	b	c	a
Groupe III	6	c	a	b

Nous constatons qu'en confrontant 2 à 2 les trois projets, qu'il n'y a pas de Condorcet winner, qu'il n'y a pas de Borda winner et que a l'emporte à la majorité simple.

La matrice des votes est :

	a	b	c	Total	Score Copeland
a	/	14	8	22	0
b	7	/	15	22	0
c	13	6	/	19	0

4.4.8.8. EXEMPLE 8D

Soit le profil suivant :

2	x	y	z
2	y	z	x
1	z	x	y

Il n'y a pas de majority winner. L'ordre collectif est y~x z.

La matrice de l'outranking est :

	x	y	z	Total	Score Copeland
x	/	3	2	5	0
y	2	/	4	6	0
z	3	1	/	4	0

Chacun a le même score Copeland, égal à 1. Il n'y a ni Condorcet winner ni Condorcet loser, mais un cycle x y z x.

Le projet y est le Borda winner et l'ordre collectif est y x z.

Supposons que les votants du troisième groupe n'aient pas l'ordre individuel z x y, mais x z y. Notons que la seule chose qui change est que z est placé derrière x, la relation entre x et y à savoir y<x n'étant pas changée.

Alors, le profil serait :

2	x	y	z
2	y	z	x
1	x	z	y

Maintenant, on a un majority winner à la majorité absolue, un Condorcet winner et un Borda winner, à savoir chaque fois le projet x.

Maintenant, supposons que l'on élimine le projet z, le profil des préférences devient :

2	x	y
2	y	x
1	x	y

C'est le projet x qui l'emporte à la majorité absolue. Il est le Condorcet winner et le Borda winner.

Dans cet exemple, le renversement dans le troisième groupe entre x et z ainsi que l'élimination du projet z ont le même impact par rapport au profil de préférences initial, ils font du projet x le « *winner* ».

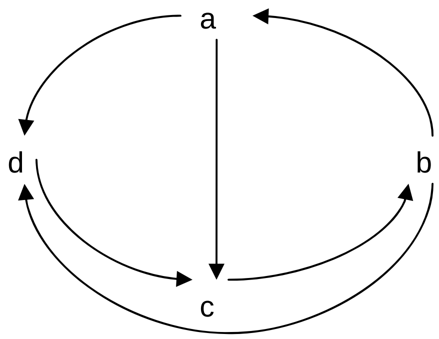
4.4.8.9. EXEMPLE 8E

Soit le profil des préférences :

10	a	b	c	d
10	b	a	d	c
10	c	b	a	d

La matrice des votes est :

	a	b	c	d	Total	Score Copeland	Nombre 1ières places
a	/	10	20	30	60	1	10
b	20	/	10	20	50	1	10
c	10	20	/	10	40	-1	10
d	0	10	20	/	30	-1	0



Il y a un cycle a d c b a.

4.4.9. Pas de Condorcet winner

4.4.9.1. EXEMPLE 9

Soit le profil suivant avec 19 votants pour 4 projets :

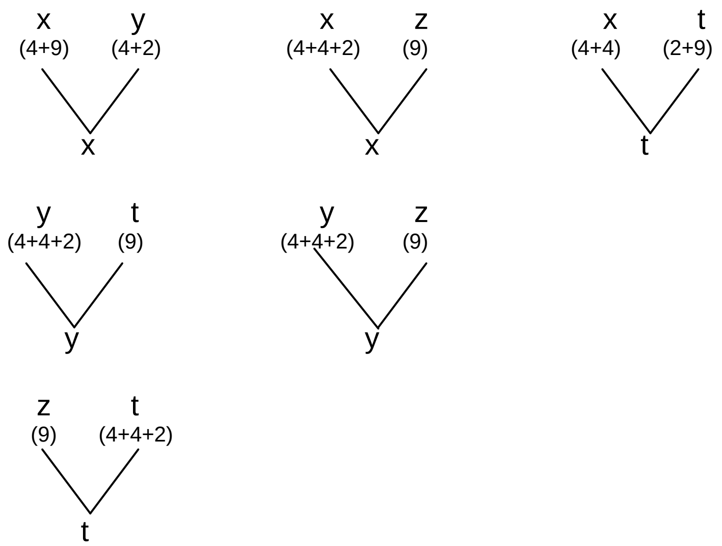
Groupe I	4	x	y	t	z
Groupe II	4	y	x	t	z
Groupe III	2	y	t	x	z
Groupe IV	9	z	t	x	y
	19				

4.4.9.1.1. Majorité simple

Il existe une majorité simple pour le projet z, recueillant (les votants du groupe IV) 9 voix, contre 6 pour y, 4 pour x et aucune pour t. Notez que 10 des 14 votants classent z en dernière place de leurs préférences. Mais pour la majorité simple, cela n'est pas relevant.

4.4.9.1.2. Méthode de Condorcet

La méthode de Condorcet donne :



Construisons le tableau de ces votes bilatéraux :

	x	y	z	t	Total	Score Copeland
x	/	13	10	8	31	1
y	6	/	10	10	26	1
z	9	9	/	9	27	-3
t	11	9	10	/	30	1

Il n'existe pas de Condorcet winner puisque aucun projet ne le remporte dans chacune de ces confrontations bilatérales avec les autres projets, ni de Condorcet loser puisque aucun projet ne perd dans toutes ses confrontations bilatérales.

On a trois projets qui ont le même score de Copeland, c'est-à-dire qui gagnent chacun deux de leurs trois confrontations bilatérales respectives, à savoir les projets x, y et t.

L'ordre collectif est x~y~t z. Il y a un cycle sur le triplet (x,y,t).

Il serait légitime de s'interroger comment départager les trois projets x, y et t. On pourrait raisonner comme suit. Chacun de ces trois projets perd une seule confrontation contre l'un des deux autres projets du triplet x, y et t.

Toutefois, on constate que le total des voix obtenues dans les comparaisons bilatérales n'est pas la même, le total étant le plus élevé pour x, le moins élevé pour y. Cela se reflète dans le résultat selon la méthode de Borda.

Partant, on pourrait se donner la méthode suivante qui se déclinerait en deux étapes : 1. Choisir le Condorcet winner 2 s'il n'y en a pas, prendre le Borda winner, s'il y en a (cf. section 4.4.9.6).

4.4.9.1.3. Méthode de Borda

La méthode de Borda donne :

	x	y	z	t
Groupe I	4·3	4·2	4·0	4·1
Groupe II	4·2	4·3	4·0	4·1
Groupe III	2·1	2·3	2·0	2·2
Groupe IV	9·1	9·0	9·3	9·2
	31	26	27	30

Donc le projet x est le Borda winner. Le projet z, qui l'emporte à la majorité simple, n'a que 27 voix.

4.4.9.1.4. Conclusion

En résumé :

	MS	MC	MB
choix	z	-	x
ordre	z y x t	x~y>z~t	x t z y

La méthode de Condorcet ne donne pas de résultat. Par contre, la méthode de Borda en donne un, à savoir le projet x tandis que la majorité simple dégage le projet z.

Nous avons également constaté que la méthode du vote binominal dégage le projet t tandis que le vote à ballotage dégage le projet y. Donc, pour chaque projet il existe une méthode de vote dont ce projet sort gagnant.

4.4.9.1.5. Vote antipluralité

Si la règle de vote est que chaque votant doit voter pour deux projets, on a le résultat suivant :

x	y	z	t
4	4	-	-
4	4	-	-
-	2	-	2
-	-	9	9
8	10	9	11

C'est le projet t qui remporte le vote. L'ordre collectif est t y z x.

4.4.9.1.6. Méthode de Black

Duncan Black a proposé une règle de décision, en soit, très simple. Choisir le Condorcet winner et s'il n'y en a pas, choisir le Borda winner. On pourrait généraliser cette méthode en retenant que dans la deuxième étape, s'il y en a, il y aurait lieu de choisir le projet qui l'emporte avec la méthode de Nanson.

En l'occurrence, il n'y a pas de Condorcet winner, mais un Borda winner, donc selon l'approche de Black c'est le projet x qui devrait l'emporter.

4.4.9.1.7. Méthode du ballotage (Stichwahl)

Supposons que la règle de vote est qu'il y a au maximum deux tours. Si dans un premier tour, avec un vote par votant, un projet obtient une majorité absolue, ce projet est retenu. Si aucun projet n'obtient une majorité absolue, les deux projets qui ont eu le plus de voix au premier tour passent au deuxième tour où le projet qui obtient la majorité simple l'emporte.

Chaque votant déclare donc au départ son profil des préférences. Aucun projet n'a une majorité absolue. Le projet t a le moins de voix. Il est écarté.

Au premier tour, on a :

x	y	z	t
4	6	9	0

La majorité absolue étant de 10 votes, force est de constater qu'aucun projet n'a plus de 50% des votes. L'on organise dès lors un deuxième tour où s'opposent y et z, les deux projets x et t étant écartés.

Le résultat sera :

y	z
10	9

C'est donc le projet y qui l'emporte.

4.4.9.1.8. Méthode de Hare (« Sequential Runoff », « Single transferable vote »)[1]

La méthode de Hare se décline comme suit.

1. Chaque votant soumet l'entièreté de son ordre des préférences.
2. Le projet qui a une majorité absolue l'emporte.
3. S'il n'y a pas de tel projet, on élimine le projet qui au premier tour a reçu le moins de premières places et ainsi de suite jusqu'à ce qu'un projet obtienne une majorité absolue.

Force est de constater que les différents projets au premier tour obtiennent les nombres respectifs suivants de première place :

x	y	z	t
4	6	9	0

On élimine le projet z pour passer au tour suivant qui se fait sur la base du profil :

4	x	y	t
4	y	x	t
2	y	t	x
9	t	x	y

L'on 'transfère' en l'occurrence les 9 votes pour z sur le projet t.

On obtient :

x	y	z
4	6	9

[1] Strictement parlant, on parle de méthode d'élimination de Hare (un avocat anglais, même si la même méthode a été élaborée par Carl Andrea, un mathématicien danois) si l'on cherche un seul projet gagnant et on parle de méthode de Hare ou méthode du single transferable vote (ou encore preferential voting) s'il y a lieu de choisir plus d'un gagnant. (cf. Nielson et de Villiers, *Is Democracy fair ?*, Key Curriculum Press, 1997, p. 45).

On élimine le projet x pour passer au troisième tour :

y	z
10	9

C’est le projet y qui l’emporte.

L’ordre collectif est y z x t.

4.4.9.1.9. Méthode de Coombs

La méthode de Coomb fonctionne comme la méthode de Hare, sauf que l’on élimine à chaque tour le projet qui obtient le plus de dernières places.

Le nombre de dernières places au premier tour est :

x	y	z	t
0	9	10	0

On élimine le projet z. Au tour suivant, on a :

x	y	t
2	9	8

On élimine le projet y. Au tour suivant :

x	t
11	8

C’est le projet t qui l’emporte.

L’ordre collectif est t x y z.

On peut constater que l’on peut trouver pour chaque projet une méthode de vote « *raisonnable* » qui dégage précisément ce projet comme projet gagnant.

La majorité a dégagé z, la méthode de Borda donne x, l’anti-pluralité donne y et la méthode de Coomb donne t.

4.4.9.2. EXEMPLE 9B

Soit le profil des préférences ci-après :

Groupe I	6	x	y	z
Groupe II	2	x	z	y
Groupe III	2	z	x	y
Groupe IV	5	z	y	x
Groupe V	4	y	z	x

Montrez que le projet x l'emporte à la majorité, qu'il n'y a pas de Condorcet winner et que le projet z est le Borda winner. Montrez que si à chacun des deux projets occupent une première et une deuxième place, c'est le projet y qui l'emporte.

La matrice des votes est :

	x	y	z	Total	Score Copeland	Nombre 1ières places
x	/	10	8	18	0	8
y	9	/	10	19	0	7
z	11	9	/	20	0	4

4.4.9.3. EXEMPLE 9C

Soit le profil des préférences ci-après comprenant 3 projets et 3 votants :

7	x	y	z
8	x	z	y
1	y	x	z
11	y	z	x
7	z	x	y
2	z	y	x

Le projet qui l'emporte à la majorité est le projet x. L'ordre collectif qui se dégage sur ce plan est x y z.

L'outranking matrice est :

	x	y	z	Total	Score Copeland
x	/	22	13	38	0
y	14	/	29	43	0
z	20	17	/	37	0
				118	

Il n'y a pas de Condorcet winner et le projet y est le Borda winner. L'ordre collectif selon Borda est y x z.

Supposons maintenant, contrairement à tous nos cas précédents, qu'il y a lieu de retenir 2 projets.

Analysez ce qui se passe dans les cas suivants :

- considérer les ordres de préférence individuels comme un tout indissociable et considérer donc comme le vœu de la majorité l'ordre individuel complet qui figure le plus souvent dans le profil des préférences ;

- prendre les deux projets qui occupent les deux premières places dans un ordre collectif reposant sur l'approche majoritaire.

4.4.10. Exemple 10. Les trois méthodes donnent chacune un résultat différent.

4.4.10.1. EXEMPLE 10

Soit le profil des préférences suivant, avec 30 votants et 4 projets :

Groupe I	3	x	z	y	t
Groupe II	6	x	t	z	y
Groupe III	3	y	z	t	x
Groupe IV	5	y	t	z	x
Groupe V	2	z	y	t	x
Groupe VI	5	z	t	y	x
Groupe VII	2	t	y	z	x
Groupe VIII	4	t	z	y	x
	30				

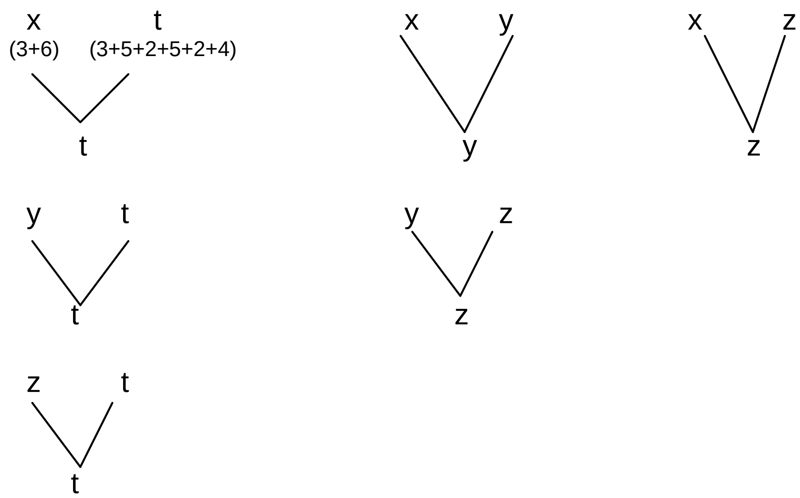
4.4.10.1.1. Majorité simple

Sous la majorité simple, c'est x qui l'emporte avec 9 voix (groupe I et groupe II) contre 8 pour y, 7 pour z et 6 pour t.

L'ordre collectif est x y z t.

4.4.10.1.2. Méthode de Condorcet

En appliquant la méthode de Condorcet, on trouve, et peu importe l'agenda :



Le Condorcet winner est le projet t, le projet x, qui l'a emporté à la majorité simple, étant le Condorcet loser.

L'ordre collectif est t z y x.

L'outranking matrice est :

	x	y	z	t	Total voix	Score Copeland
x	/	9	9	9	27	-3
y	21	/	10	13	44	-1
z	21	20	/	13	54	1
t	18	20	17	/	55	3

4.4.10.1.3. Méthode de Borda

	x	y	z	t
Groupe I	3·3	3·1	3·2	3·0
Groupe II	6·3	6·0	6·1	6·2
Groupe III	3·0	3·3	3·2	3·1
Groupe IV	5·0	5·3	5·1	5·2
Groupe V	2·0	2·2	2·3	2·1
Groupe VI	5·0	5·1	5·3	5·2
Groupe VII	2·0	2·2	2·1	2·3
Groupe VIII	4·0	4·1	4·2	4·3
	27	44	54	55

C'est le projet z qui l'emporte avec la méthode de Borda.

L'ordre collectif est z t y x. Le Borda loser est le projet x.

4.4.10.1.4. Conclusion

En résumé :

	MS	MC	MB
choix	x	t	z
ordre	x y z t	t z y x	z t y x

Nous remarquons que chacune des trois méthodes donne un résultat différent, à savoir la majorité simple donne le projet x, la méthode de Condorcet le projet t et la méthode de Borda, le projet z.

C'est le Condorcet loser qui est également le Borda loser qui l'emporte à la majorité simple.

Un seul projet perd indépendamment de la méthode de vote appliquée, à savoir le projet y.

Eliminons ce projet y du profil des préférences, qui devient dès lors :

Groupe I	3	x	z	t
Groupe II	6	x	t	z
Groupe III	3	z	t	x
Groupe IV	5	t	z	x
Groupe V	2	z	t	x
Groupe VI	5	z	t	x
Groupe VII	2	t	z	x
Groupe VIII	4	t	z	x

On remarque que la majorité simple donne le projet t comme gagnant de même que les méthodes de Condorcet et de Borda.

Donc en ayant éliminé y, le projet qui, peu importe laquelle des trois méthodes est retenue, ne sortira jamais gagnant, les trois méthodes donnent le même résultat, t, qui précédemment était seulement gagnant avec la méthode de Condorcet.

A contrario, on peut constater que si au point de départ on a le dernier profil et si l'on ajoute un projet du type projet y, alors on arrivera à « *déstabiliser* » le projet t.

Notons que si nous éliminons z ou si nous éliminons x, le projet t continue à l'emporter.

Regardons encore d'autres méthodes de vote.

4.4.10.1.5. Méthode de Hare

Appliquons la méthode de Hare telle qu'explicitée précédemment.

Au premier tour, les différents projets auront :

x	y	z	t
9	8	7	6

Donc t est éliminé puisqu'il a le moins de premières places, et restent en course les projets x, y et z.

Au second tour, on aura :

x	y	z
9	10	11

Donc x est éliminé, et restent en course y et z.

Au troisième et dernier tour, où subsistent les deux projets y et z, on aura :

y	z
10	20

C’est donc le projet z qui le remporte avec la méthode de Hare.

L’ordre collectif est z y x t.

4.4.10.1.6. Méthode du ballotage

Faisons un premier tour. Il n’y a pas de projet qui a une majorité absolue. Partant, on organise un deuxième tour avec seulement les deux projets ayant reçu au premier tour le plus de voix.

On a, au premier tour :

x	y	z	t
9	8	7	6

Au deuxième tour, on confronte x à y pour obtenir :

x	y
9	21

C’est le projet y qui l’emporte.

Nous constatons que pour chacun des quatre projets, x, y, z et t on peut trouver une méthode de vote, chaque fois différente, dont le projet en question sort gagnant.

En effet, x est le majority winner, t est le Condorcet winner, z est le Borda winner et y gagne le ballotage.

4.4.10.2. Autres exemples ou les trois methodes divergent

Exemple 10a

Soit le profil des préférences ci-après :

3	a	b	c	d
1	b	c	d	a
2	c	d	b	a
1	d	c	b	a

Avec ce profil des préférences, chacune des trois méthodes de vote donne un résultat différent, à savoir a pour la majorité simple, b pour la méthode de Condorcet et c pour la méthode de Borda (vérifiez-le).

Si on applique la méthode du ballotage (« plurality runoff »), on aura que les projets a et c passent le premier tour et qu'au deuxième tour le projet c l'emporte contre le projet a avec 4 contre 3 voix.

Construisons la matrice du vote :

	a	b	c	d	Total	Score Copeland	Nombre de 1ières places
a	/	3	3	3	9	-3	3
b	4	/	4	4	12	3	1
c	4	3	/	6	13	1	2
d	4	3	1	/	8	-1	1
					42		7

Nous pouvons transformer ce tableau en un tableau en quelque sorte encore plus synthétique, en remplaçant les nombres des comparaisons par paires selon qu'ils sont supérieurs ou égaux à 4 et inférieurs à 4 par respectivement 1 et -1.[1]

On obtient la matrice :

	a	b	c	d	Total	Score Copeland	Nombre 1ières places
a	/	-1	-1	-1	9	-3	3
b	1	/	1	1	12	3	1
c	1	-1	/	1	13	1	2
d	1	-1	-1	/	8	-1	1
					42	0	7

Maintenant, on peut encore arranger l'ordre des lignes en fonction du score de Copeland par ordre décroissant :

	b	c	d	a	Total	Score Copeland	Nombre 1ières places
b	/	1	1	1	12	3	1
c	-1	/	1	1	13	1	2
d	-1	-1	/	1	8	-1	1
a	-1	-1	-1	/	9	-3	3

Nous constatons que cette matrice contient à droite de la diagonale principale exclusivement des 1 et à gauche de cette dernière exclusivement des 0.

Exemple 10b

Il en est de même du profil des préférences ci-après, où x l'emportera à la majorité simple, où y est le Condorcet winner et où z est le Borda winner (vérifiez-le).

[1] Que se passe-t-il si le projet d était supprimé ?

2	x	y	z	t
1	x	z	t	y
1	y	z	x	t
1	y	z	t	x
1	z	t	y	x
1	t	z	y	x

Exemple 10c[1]

Supposons qu'il y ait cinq candidats pour le poste de Président d'un pays, A, B, C, D et E, et supposons que le corps électoral se compose de 100 personnes dont le profil des préférences est le suivant :

33	A	B	C	D	E
16	B	D	C	E	A
3	C	D	B	A	E
8	C	E	B	D	A
18	D	E	C	B	A
22	E	C	B	D	A
100					

Construisons l'outranking matrice :

	A	B	C	D	E	Total	Score Copeland	Nombre 1iers rangs
A	/	33	33	33	36	135	-4	33
B	67	/	49	79	52	247	2	16
C	67	51	/	66	60	244	4	11
D	67	21	34	/	70	192	0	18
E	64	48	40	30	/	182	-2	22

Si le Président est élu à la majorité simple, c'est le candidat A qui gagne les élections.

Si le Président est élu selon la méthode de Borda, c'est le candidat B – comme vous pouvez le vérifier,- qui remporte les élections.

Si on applique la méthode de Condorcet, c'est le candidat C qui remporte toutes les confrontations « *face à face* » et qui devient président.

Si on applique la règle consistant à éliminer successivement à chaque tour le candidat qui a obtenu le moins de premiers rangs aussi longtemps qu'aucun candidat ne reçoive une majorité absolue, c'est D qui va remporter les élections.[2]

---

[1] Ce profil des préférences est analysé p.ex. dans *Spektrum, Fairness, Kooperation, Demokratie*.

[2] Il existe deux variantes. La méthode de Hare où au départ l'entièreté du profil est indiqué et des tours de vote effectifs successifs avec chaque fois les projets restants.

Finalement, si la méthode de vote prévoit deux tours en ce sens que le candidat qui, au premier tour, a reçu une majorité absolue l'emporte et à défaut, les deux candidats qui ont eu le plus de voix au premier, passent au deuxième dont sort gagnant le candidat qui a la majorité (forcément absolue), alors c'est le candidat E qui va gagner.

Donc, force est de constater que chacune de ces cinq méthodes de vote analysées dégage un autre vainqueur.

Exemple 10d

Soit l'exemple suivant qui fut, à l'époque, donné par Condorcet même, portant sur trois projets A, B et C et 60 votants :

Groupe I	13	A	C	B
Groupe II	10	A	B	C
Groupe III	13	B	C	A
Groupe IV	6	B	A	C
Groupe V	18	C	B	A
	60			

C'est le projet A qui l'emporte à la majorité. L'ordre collectif est selon la méthode de la majorité ABC.

Construisons la matrice des votes ou matrice de Dodgson :

	A	B	C	Total des voix	Score de Copland
A	/	23	29	52	-2
B	37	/	29	66	0
C	31	31	/	62	2

Force est de constater que le projet C est le Condorcet winner, emportant avec chaque fois 31 voix sur 60 les confrontations bilatérales avec tous les autres projets, à savoir A et B. Le projet A est le Condorcet loser.

Ce tableau nous indique également les votes de Borda dans l'avant-dernière colonne. Le projet B est le Borda winner, le projet A étant le Borda loser.

4.4.10.3. Exemple 10e : Approval voting

Soit le profil des préférences ci-après :[1]

Groupe I	4	a	e	d	c	b
Groupe II	3	b	c	e	d	a
Groupe III	2	c	d	e	b	a

[1] repris de Nurmi

Le majority winner est le projet a.

Le Condorcet winner est le projet c.

Le Borda winner est le projet e.

Le ballotage winner est le projet b.

Donc, les quatre méthodes ci-dessus donnent chacune un autre projet gagnant.

On peut maintenant légitimement s'interroger si l'on pouvait concevoir une méthode de vote qui dégagerait, en principe du moins, comme projet gagnant le projet d.

La réponse est oui. Considérons la méthode de l'approval voting[1].

Expliquons cette méthode et montrons qu'elle peut, moyennant des hypothèses supplémentaires, dégager le projet d.

La méthode de l'« *approval voting* » consiste à donner au votant la possibilité de donner au votant la possibilité de donner chaque fois une voix à autant de projets qu'il veut. Donc, chaque projet soit peut recevoir une voix ou aucune voix.

Un votant peut donc approuver un projet, il lui donne une voix ou ne pas l'approuver ne lui donner aucune. A un extrême, il ne peut approuver aucun, à l'autre extrême, il peut les approuver tous.

Le projet qui recevra le plus de voix sera le projet retenu.

Supposons maintenant que les différents votants votent comme suit (en supposant, de surcroît, que chaque votant dans un groupe donné vote de façon identique même) :

	a	b	c	d	e
Groupe I	4·1	0	0	4·1	4·1
Groupe II	0	3·1	3·1	0	0
Groupe III	0	0	3·1	3·1	0
	4	3	6	7	4

Force est de constater que cette fois-ci le projet d l'emporte.

Nous n'avons que très succinctement exposé la méthode de l'approval voting qui a fait l'objet de beaucoup d'attentions ces dernières décennies et de beaucoup de controverses.

Si des auteurs comme Brams et Fishburn la présentent comme la solution à (quasi) tous les mots, un autre auteur éminent comme Donald Saari –

[1] Cette méthode est relativement récente et promue notamment par Steven Brams, un des spécialistes les plus connus en sciences politiques (1940) et Peter Fishburn, p.ex. dans *Approval voting*, 1983, Bell Telephone Labatorils.

avec qui nous continuons la sous-section ci-après – conclut que l'approval voting ne résout aucun problème mais les cumule tous.[1]

4.4.10.4. L'argument de Donald Saari[2] pour la méthode de Borda

Soit le profil ci-après :

10	A	C	B
6	C	A	B
4	C	B	A
6	B	A	C
5	B	C	A

C'est le projet B qui l'emporte à la majorité, le projet A est le Condorcet winner et le projet C est le Borda winner.

Identifions maintenant le sous-profil suivant :

5	A	C	B
5	B	C	A

Les trois ordres individuels A C B sont l'inverse des cinq ordres individuels B C A.

Soit encore le sous-profil suivant :

2	C	A	B
2	B	A	C

De nouveau, l'on a que l'un est l'inverse de l'autre.

Eliminons ces deux sous-profils du profil global.

Il reste :

5	A	C	B
4	C	A	B
4	C	B	A
4	B	A	C

On a maintenant que C a la majorité, que le Condorcet winner est toujours A et que le Borda winner est toujours C.

On constate un changement au niveau de la majorité.

---

[1] cf. le livre de William Poundstone, *Forming the vote*, pour des détails historiques sur le développement de la méthode de l'approval voting et pour des précisions sur cette querelle scientifique.

[2] "*Donald G. Saari (1940) is a Finnish-American astronomer, economist, decision theorist and – above all – mathematician. Applying and developing geometric and topological methods to social choice problems he has profoundly influenced over understanding of voting systems, markets and mechanism design*." (cf. Nurmi, *Models of Political Economy*, Routledge, 2006). Si un prix Nobel sera attribué pour des développements en science politique, dans une approche économique, Saari, Brams (même s'ils ont des vues divergentes sur l'approval voting) et Plott sont à considérer.

On constate encore qu'il y a un sous-profil avec un cycle, à savoir :

4	A	C	B
4	C	B	A
4	B	C	A

Eliminons ce sous-profil cyclique. Il reste le profil des préférences :

1	A	C	B
4	C	B	A

On a maintenant que C l'emporte pour chacune des trois méthodes de vote.

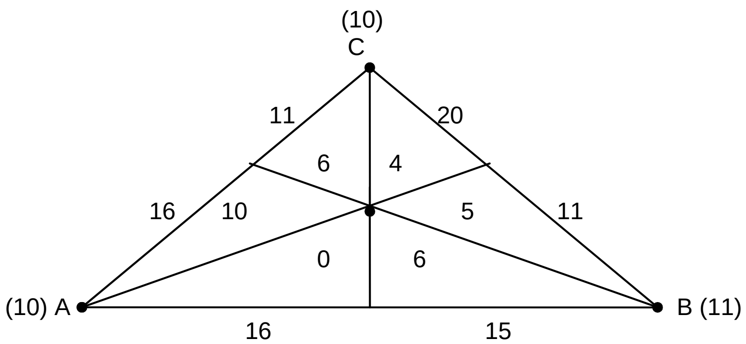
En résumé, on a les résultats suivants :

	M	MC	MB
profil initial	B	A	C
profil « *netting* »	C	A	C
profil élimination cycle	C	C	C

La seule méthode qui donne toujours le même résultat, que ce soit pour le profil initial, pour le profil après netting ou le profil après netting et élimination du netting et du cycle est la méthode de Borda qui toujours dégage le projet C[1]. La méthode de Borda apparaît donc comme n'étant pas sensible à la présence de cycles ou de groupes se neutralisant.

Pour terminer, notons que Saari a proposé une présentation géométrique d'un profil de préférences en recourant à la figure géométrique du triangle[2].

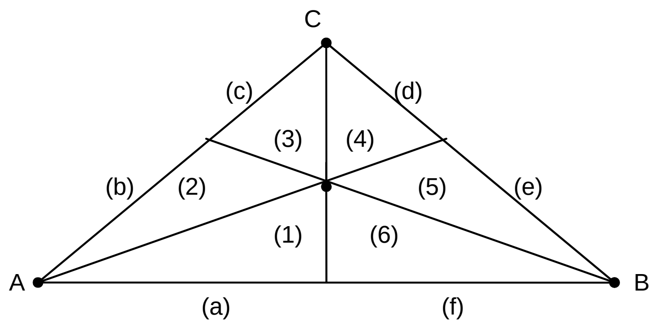
Le triangle ci-après représente le profil des préférences ci-dessus :



Afin d'expliquer la construction et la lecture de ce triangle, dénommons les différentes zones comme suit :

[1] cf. Nurmi.

[2] cf. p.ex. Saari, *Geometry of Voting, Chapter 27, Handbook of Social Choice and Welfare*, Volume 2, North Holland, 2011.



(1) nombre d’individus avec ordre A B C
(2) nombre d’individus avec ordre A C B
(3) nombre d’individus avec ordre C A B
(4) nombre d’individus avec ordre C B A
(5) nombre d’individus avec ordre B C A
(6) nombre d’individus avec ordre B A C
(a) (1)+(2)+(3) : nombre de fois où A est préféré à B
(b) (1)+(2)+(6) : nombre de fois où A est préféré à C
(c) (3)+(4)+(5) : nombre de fois où C est préféré à A
(d) (4)+(3)+(2) : nombre de fois où C est préféré à B
(e) (1)+(6)+(5) : nombre de fois où B est préféré à C
(f) (4)+(5)+(6) : nombre de fois où B est préféré à A

Les chiffres entre parenthèses aux coins du triangle représentent le nombre de fois où un projet figure en première place, à savoir pour A (1)+(2), pour B (6)+(5) et pour C (3)+(4).

4.4.10.5. La méta-problématique capitale. Qui choisit comment quelle méthode de vote appliquer ou comment faire le choix du comment choisir ?

Elevons maintenant la réflexion à un second degré et partons de la situation où chacun des 7 votants constate les résultats que les trois méthodes de vote dégagent (vérifiez-le).

Supposons que l’on soumette maintenant au vote non pas les projets, mais les méthodes de vote mêmes (ce que l’on peut appeler un « *métavote* », un vote sur le vote) et admettons que chacun des individus classe les méthodes de vote en fonction de la désirabilité du résultat qu’elles dégagent par rapport à ses préférences individuelles.

On obtient alors les ordres individuels ci-après portant sur les méthodes de vote :

2	MS	C	B
1	MS	B	C
1	C	B	MS
1	C	B	MS
1	B	C	MS
1	B	C	MS

A titre d'exemple, prenons le dernier votant. Il préfère le projet t, or aucune méthode ne dégage ce profil comme gagnant.

Par contre, le projet qu'il classe au deuxième rang de ses préférences est dégagé par la méthode de Borda. Donc, il préfère la méthode de Borda aux deux autres méthodes.

Le projet y qu'il classe en troisième et avant-dernière place le remporterait avec la méthode de Condorcet, ce qui fait qu'il classe cette méthode en deuxième place de ses préférences relatives aux méthodes de vote.

La méthode de la majorité simple qui dégage x qui figure en dernière place de ses préférences est donc la méthode de vote que ce votant préfère le moins.

Si on applique, pour départager ces trois méthodes, la majorité simple, la méthode de la majorité simple l'emporte. La majorité simple se choisit donc elle-même.

Il en est de même avec la méthode de Condorcet. Si on applique celle-ci, force est de constater que c'est la méthode de Condorcet qui est le Condorcet winner (par rapport aux autres méthodes de vote), puisqu'elle l'emporte sur chaque autre méthode de vote.

Par contre, si on applique la méthode de Borda, c'est la méthode de Condorcet qui obtient le plus de voix (8 voix contre 6 pour la majorité simple et 7 pour la méthode de Borda).

La méthode de Borda ne se choisit pas elle-même contrairement aux deux autres méthodes de vote.

Gardons maintenant les deux méthodes qui se choisissent elles-mêmes, et éliminons donc la méthode de Borda comme méthode possible.

Alors les préférences individuelles deviennent :

2	MS	C
1	MS	C
1	C	MS
1	C	MS
1	C	MS
1	C	MS

Alors, en appliquant la majorité simple, c'est la méthode de Condorcet qui l'emporte. De même, si on applique la méthode de Condorcet, c'est de nouveau la méthode de Condorcet qui l'emporte.

Donc, la méthode de Condorcet est la seule méthode qui finit, à travers les deux étapes, à se sélectionner elle-même, donc à s'auto-sélectionner.

4.4.11. Exemple 11

Soit le profil ci-après avec 5 votants devant choisir entre 5 projets :

A	x	y	z	t	e
B	t	y	e	z	x
C	t	y	x	e	z
D	y	z	x	e	t
E	x	t	e	z	y

4.4.11.1. Majorité simple

Aucun projet n'obtient la majorité simple, x et t obtenant chacun 2 voix, y obtenant une voix et z et e aucune.

4.4.11.2. Methode de Condorcet

La méthode de Condorcet montre qu'il n'y a pas de Condorcet winner mais un Condorcet loser, à savoir le projet z.

x y	x z	x t	x e
y	x	x	x

y z	y t	y e
y	t	y

z t	z e
t	e

t e
t

A rappeler qu'il n'y a pas de Condorcet winner parce qu'aucun projet ne sort gagnant dans toutes ses confrontations avec chacun des autres projets.

Par contre, comme le projet z sort perdant dans chacune de ses confrontations, il est le Condorcet loser.

Cet exemple montre qu'on peut avoir un Condorcet loser sans que l'on ait forcément un Condorcet winner.

Par ailleurs, l'on peut constater que le projet e perd chaque confrontation, sauf celle contre le Condorcet loser.

Les trois autres projets x, y et t chacun gagnent trois confrontations et en perdent une.

Qui plus est, on a une intransitivité au niveau de ces trois projets.

En effet, on a y>x, x>t et t>y.

Le triplet (x,y,t) constitue un top-cycle, c.-à-d. un ensemble de projets où chacun l'emporte contre les projets qui n'y appartiennent pas mais où il y a un cycle entre les projets mêmes appartenant à cet ensemble.

La matrice outranking est :

	x	y	z	t	e	Total	Score Copeland
x	/	2	3	3	4	12	2
y	3	/	4	2	4	13	2
z	2	1	/	2	2	7	-4
t	2	3	3	/	4	12	2
e	1	1	3	1	/	6	-2

Cette matrice, en écrivant respectivement 1, 0 ou -1 selon qu'un projet remporte une confrontation par paire ou non, devient :

	x	y	z	t	e	Score Copeland
x	/	-1	1	1	1	2
y	1	/	1	-1	1	2
z	-1	-1	/	-1	-1	-4
t	-1	1	1	/	1	2
e	-1	-1	1	-1	/	-2

En changeant les lignes par ordre décroissant du score Copeland, on obtient :

	x	y	z	t	e
x	/	-1	1	1	1
y	1	/	-1	1	1
t	-1	1	/	1	1
e	-1	-1	-1	/	1
z	-1	-1	-1	-1	/

4.4.11.3. Methode de Borda

La méthode de Borda donne:

	x	y	z	t	e
A	4	3	2	1	0
B	0	3	1	4	2
C	2	3	0	4	1
D	2	4	3	0	1
E	4	0	1	3	2
	12	13	7	12	6

C'est le projet y qui est le Borda winner. Le Borda loser est e.

4.4.11.4. Conclusion

En résumé :

	MS	MC	MB
choix	-	-	y
ordre	x~t>z~y>e	(x~y~t>e>z)	y>x~t>z>e

Les méthodes de la majorité simple et de Condorcet ne donnent pas de résultat. La méthode de Borda donne gagnant le projet y.

4.4.12. Exemple 12

Le profil des préférences est :

A	x	y	z
B	z	y	x
C	z	y	x
D	y	x	z

4.4.12.1. Majorite simple

Avec la majorité simple, le projet z l'emporte, obtenant 2 voix, contre 1 pour x et 1 pour y.

Notez que 2 votants ont, au niveau de leurs préférences individuelles, rangé z au dernier rang.

4.4.12.2. METHODE DE CONDORCET

En opposant deux à deux les trois projets, on constate que :

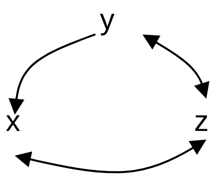
x (A)	y (B,C,D)	x (A,D)	z (B,C)	y (A,D)	z (B,C)
y		?		?	

Il n'y a pas de Condorcet winner, ni de Condorcet loser.

Nous constatons que pour les pairs (x,z) et (y,z), le vote à la majorité ne donne pas de projet gagnant, les deux projets obtenant chaque fois le même nombre de votes. Si nous définissons cet état des choses comme « *indifférence collective* », et utilisons le signe « ~ » pour indiquer cette indifférence collective, alors on a x~z, z~y et y>x.

Nous constatons qu'il n'y a pas transitivité puisque pour que tel soit le cas, il faudrait avoir, compte tenu que x~z et z~y, que y~x.

Par contre, il n'y a pas cyclicité.



Cet exemple montre que la non-transitivité n'implique pas forcément la cyclicité. En règle générale, avec des exceptions, s'il n'y a pas cyclicité, il n'y a pas de problème d'agenda setting.[1]

Nous rencontrons ici un problème nouveau en ce sens que si on applique notre principe d'établir l'ordre social d'après le nombre de fois où un projet sort gagnant des confrontations bilatérales, force est de constater que le projet y, sans être Condorcet winner, au sens strict, il ne gagne pas chaque fois,- est toutefois une fois gagnant sans ne jamais perdre. On pourrait dire

---

[1] En fait, cela n'est pas tout à fait exact. Soit le profil des préférences suivant :

2	x	y	z
1	y	z	x
1	z	x	y

Dans ce cas, on a : x y y z x z

x y ?

Si le Président du groupe a le pouvoir de décider en cas d'égalité des voix et supposons que ce soit l'individu dont les préférences sont z x y, on a les agendas possibles ci-après :

Ag_1	Ag_2	Ag_3
x y	y z	x z
x z	y x	? y
?	x	?

S'il choisit l'agenda 2, c'est x qui l'emporte. S'il choisit l'agenda 3, et s'il se prononce pour z au premier vote, c'est toujours x qui l'emporte. Mais s'il choisit l'agenda 1, il peut faire que z l'emporte.
Donc, ceci est un exemple où il n'y a pas cyclicité, mais que l'agenda setting est possible.

qu'il est Condorcet winner au sens large. Dans ce même ordre d'idées, on pourrait dire que le projet x est le Condorcet loser au sens large puisqu'il perd une fois.

Construisons le tableau :

	x	y	z	Total	Score de Copeland
x	/	1	2	3	-1
y	3	/	2	5	1
z	2	2	/	4	0

D'après le score de Copeland, c'est le projet y qui l'emporte, ayant un score de 1 contre un score de -1 pour x et de 0 pour z.

Donc dans une approche large, on pourrait constater y z x.

Notons que le projet z a un score Copeland 0 puisqu'il ne gagne ni la confrontation contre x ni celle contre y. Toutefois, il ne les perd pas non plus.

Le projet z est donc tout comme le projet y dans le core qui est donc $\{z, y\}$. Rappelons que le core comprend les projets qui ne perdent aucune confrontation bilatérale. Ne pas perdre n'est pas forcément toujours gagner si un ex aequo (« *tie* ») est possible.

4.4.12.3. METHODE DE BORDA

En appliquant la méthode de Borda, on a :

	x	y	z
A	2	1	0
B	0	1	2
C	0	1	2
D	1	2	0
	3	5	4

C'est y qui l'emporte avec la méthode de Borda. Nous constatons que malgré la non-transitivité, il y a quand-même une solution de Borda. Cela tient au fait que c'est la cyclicité qui fait qu'il n'y a pas de résultat de Borda, tandis qu'avec la seule non-transitivité, (qui n'implique pas la cyclicité), un Borda winner peut exister.

Le fait que y est le Borda winner se comprend intuitivement. y est le projet qui est préféré à un des deux autres (x) et indifférent au deuxième (z). z est indifférent aux deux autres et x est indifférent à l'un des deux autres (z) et le deuxième (y) lui est préféré.

4.4.12.4. CONCLUSION

En résumé :

	MS	MC	MB
choix	z	(y)	y
ordre	z x y	(y x~z)	y z x

Si Condorcet ne donne pas de résultat n'arrivant pas à départager au sens strict y et z, la majorité simple donne z et la méthode de Borda donne y.

4.4.13. Exemple 13

Soit le profil des préférences ci-après pour 3 votants et 4 projets :

A	x	y	z	t
B	x	z	t	y
C	t	y	x	z

4.4.13.1. MAJORITE SIMPLE

Le projet x l'emporte à la majorité simple.

4.4.13.2. METHODE DE CONDORCET

Le projet x est également le Condorcet winner. Cela résulte du fait que le projet x est deux sur trois fois classé en première place d'un ordre des préférences individuel.

Par contre, il n'y a pas de Condorcet loser. (Vérifiez-le).

4.4.13.3. METHODE DE BORDA

La méthode de Borda donne

	x	y	z	t
A	3	2	1	0
B	3	0	2	1
C	1	2	0	3
	7	4	3	4

Le projet x est également le Borda winner.

4.4.13.4. Conclusion

En résumé :

	MS	MC	MB
choix	x	x	x
ordre	x~t>z~y	x>y~t~z	x>y~t>z

Les trois méthodes de vote dégagent le même résultat, le projet x.

Cet exemple montre, par ailleurs, qu'il peut y avoir un Condorcet winner, en l'occurrence x, sans qu'il n'y ait un Condorcet loser. Il ne faut donc pas conclure que la présence d'un Condorcet winner implique forcément celle d'un Condorcet loser. Cet exemple suffit pour pouvoir affirmer qu'une telle généralisation est erronée.

De même, comme le montre l'exemple ci-après comportant 3 votants et 4 projets, l'existence d'un Condorcet loser n'implique pas qu'il y ait forcément un Condorcet winner, chose déjà montrée à l'exemple 12 pour un profil avec 5 votants et 5 projets.

A	x	z	t	y
B	y	x	t	z
C	t	y	x	z

4.4.13.5. Exemple 13A

Soit le profil des préférences (1) ci-après, pour 4 votants P_1, P_2, P_3 et P_4, et pour 4 projets x, y, z et t.

Profil (1)

P_1	x	y	z	t
P_2	x	y	z	t
P_3	x	y	z	t
P_4	y	x	z	t

La majorité simple, la méthode de Condorcet et la méthode de Borda donnent le même résultat, à savoir le projet x.

L'ordre collectif des préférences est, pour la majorité simple, x>y>z~t.

Soit maintenant le profil des préférences (2) suivant :

Profil (2)

P_1	z	x	y	t
P_2	z	x	y	t
P_3	z	x	y	t
P_4	y	z	x	t

De nouveau, les trois méthodes de vote dégagent un même résultat, qui, cette fois-ci, est le projet z.

L'ordre collectif des préférences est, pour la majorité simple, z>y>x~t.

Notons que dans les deux profils des préférences (1) et (2), les relations de préférences individuelles entre z et t sont exactement identiques en ce sens que chacun des quatre votants préfère toujours z à t.

Dans l'ordre collectif se dégageant du profil des préférences (1), on a z~t tandis que dans l'ordre collectif découlant du profil (2), on a z>y>x~t, donc z>t.

On n'a pas la même relation collective entre z et t dans les deux ordres collectifs malgré le fait que dans chacun des deux profils de préférences individuelles les relations individuelles entre z et t sont identiques, à savoir z est toujours préféré à t.

Ceci illustre que la majorité simple ne satisfait pas à la condition de l'indépendance des alternatives irrelevantes.

4.4.14. Exemple 14

Soit le profil des préférences suivant pour 5 votants et 4 projets :

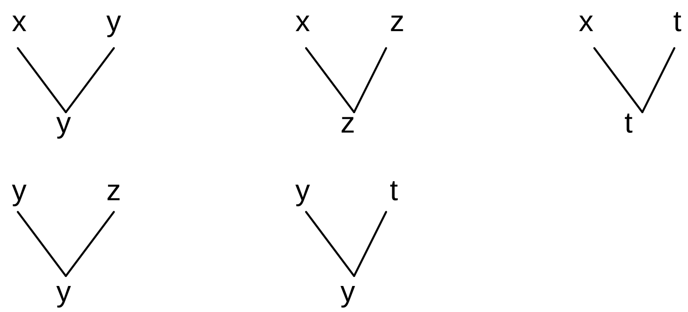
2	x	y	z	t
1	y	z	t	x
1	z	t	y	x
1	t	z	y	x

4.4.14.1. Majorite simple

Le projet x l'emporte à la majorité simple nonobstant le fait qu'il est classé en dernier rang par trois des cinq votants. L'ordre collectif est x>y~z~t.

4.4.14.2. Methode de Condorcet

La méthode de Condorcet donne :



z t

z

Le projet y est le Condorcet winner tandis que le projet x est le Condorcet loser.

L'ordre collectif est y z t x.

4.4.14.3. Methode de Borda

La méthode de Borda donne :

x	y	z	t
2·3	2·2	2·1	2·0
0	3	2	1
0	1	3	2
0	1	2	3
6	9	9	6

Il n'y a pas de Borda winner, les projets y et z se classant, tous les deux, au premier rang. Il n'y a non plus de Borda loser, au sens strict du terme, puisque les deux projets restants x et t se classent ex æquo.

Si nous appliquons la méthode de Nanson, on constate tout d'abord que le nombre de votes moyen est de $\frac{30}{4} = 7{,}5$. On élimine les projets x et t. Il reste y et z et force est de constater que le projet y l'emporte.

La matrice de vote est :

	x	y	z	t	Total	Score Copeland
x	/	2	2	2	6	-3
y	3	/	3	3	9	3
z	3	2	/	4	9	1
t	3	2	1	/	6	-1

4.4.14.4. Conclusion

En résumé :

	MS	MC	MB
choix	x	y	-
ordre	x>y~z~t	y z t x	y~z>x~t

La méthode de Borda ne donne pas de résultat unique tandis que celles de la majorité simple et de Condorcet donnent des résultats différents, le projet x pour la majorité simple et le projet y pour la méthode de Condorcet.

On remarque que le Condorcet loser l'emporte à la majorité simple, ce qui est un autre exemple du paradoxe de Borda rencontré pour la première fois dans l'exemple 7.

4.4.14.5.

Analysez le profil des préférences suivant :

6	y	z	x	t
5	z	y	x	t
4	x	t	z	y
2	t	x	y	z

4.4.15. Exemples

4.4.15.1. Exemple 15

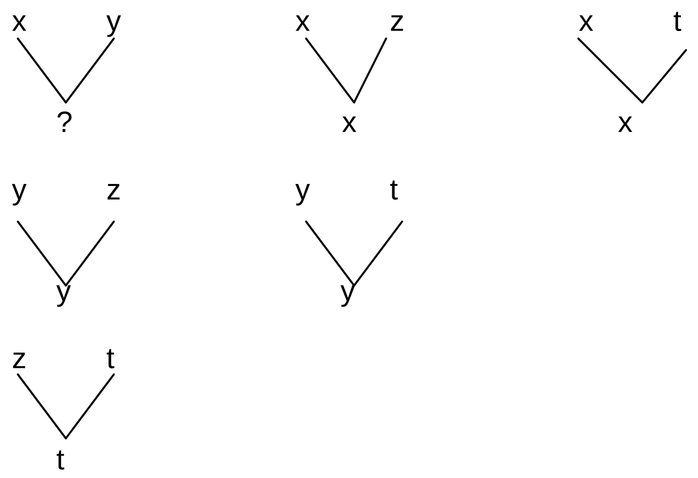
Soit le profil suivant pour 6 votants et 4 projets :

2	x	y	t	z
2	t	z	y	x
1	x	y	z	t
1	y	x	z	t

4.4.15.1.2. Majorité simple

La majorité simple dégage le projet x. L'ordre social est x t y z.

4.4.15.1.3. Méthode de Condorcet



Il n'y a pas de Condorcet winner. S'il est vrai que respectivement les projets x et y gagnent dans les confrontations par paires à la fois contre z et t, dans la confrontation directe chaque projet obtient le même nombre de voix. En revanche, il existe un Condorcet loser, le projet z.

L'outranking matrice est :

	x	y	z	t	Total	Score Copeland
x	/	3	4	4	11	2
y	3	/	4	4	11	2
z	2	2	/	2	6	-3
t	2	2	4	/	8	-1

Dans ce cas, non seulement le score de Copeland est le même, mais également le score de Borda.

Le core est $\{x, y\}$.

4.4.15.1.4. Méthode de Borda

On obtient :

x	y	z	t
2·3	2·2	2·1	2·0
2·0	2·1	2·3	2·2
3	2	0	1
2	3	0	1
11	11	8	6

Il n'y a pas de Borda winner dans la mesure où les projets x et y ne peuvent pas être départagés.

Si on applique la méthode de Nanson, on écarte au premier tour les projets z et t, puisque la moyenne est de $\frac{36}{4} = 9$. Il reste les projets x et y et c'est x qui l'emporte. On « *aboutit* » au résultat de la majorité simple.

Admettons que l'on aurait appliqué la règle suivante. On donne 6 voix au projet le plus préféré et puis respectivement 3, 1 et 0 voix par la suite.

Dans ce cas, l'on obtiendrait :

x	y	z	t
2·6	2·3	2·0	2·1
2·0	2·1	2·3	2·6
6	3	1	0
3	6	1	0
21	17	8	12

Ce serait le projet x qui l'emporterait. Expliquez ce résultat.

Montrez que cette méthode de vote 'pondère' relativement plus une première place. Montrez que s'il y a n projets, cette méthode revient pour un votant à donner 1+2+…+(n-1) voix au projet le plus préféré, 1+2+…+(n-2) voix au projet qu'il classe en deuxième place, etc., jusqu'à 1 voix à l'avant-dernier projet et aucune voix au dernier de son ordre individuel.

4.4.15.1.5. Conclusion

En résumé :

	MS	MC	MB
choix	x	-	-
ordre	x>t~y>z	(x~y t z)	x~y>z>t

Seule la majorité simple donne un résultat, le projet x. Il n'y a ni Condorcet winner, ni Borda winner.

4.4.15.2. EXEMPLE 15A[1]. METHODE DE KEMENY-YOUNG[2]

Soit le profil des préférences de départ suivant que nous allons par la suite désigner par β :

4	x	y	z
3	y	z	x
2	z	x	y

L'outranking matrice de ce profil des préférences est :

	x	y	z	Total	Score Copeland
x	/	6	4	10	0
y	3	/	7	10	0
z	5	2	/	7	0

Le majority winner existe et est le projet x. L'ordre collectif d'après la méthode de la majorité est x y z.

Il n'y a pas de Condorcet winner, chaque projet ayant un score de Copeland égal à 1, ce qui donne le cycle collectif x y z x, que nous désignons par β'. Le profil des préférences β donne par la méthode de Condorcet l'ordre collectif cyclique β'.

Il n'y a pas de Borda winner, l'ordre collectif d'après la méthode de Borda étant x~y z.

Le core est vide.

---

1 cf. Nurmi, *Voting paradoxes and how to deal with them*.

2 John Kemeny (1926-1992) a été un mathématicien et philosophe né en Hongrie. H. Peyton Young (1945) est un économiste et mathématicien américain.

Apportons encore quelques conclusions découlant de la matrice ci-dessus.

Il y a en tout 27 relations bilatérales comme il ressort du total des voix à l'avant-dernière colonne qui, pour le reste, est également le total des voix Borda.

Ce chiffre découle du fait qu'il y a neuf votants et trois projets ; les préférences de chacun étant caractérisées par trois relations de préférence, entre x et y, entre y et z et entre x et z. A titre d'exemple, chaque membre du dernier groupe a z>x, x>y et z>y, ce qui donne z x y.

Développons maintenant une méthode, la méthode de Kemeny-Young, dite aussi « *Condorcet's maximal agreement method* », qui a notamment pour objectif de dégager un ordre collectif transitif à partir d'un ordre cyclique, en l'occurrence β', reposant sur un profil des préférences, en l'occurrence β.

A cette fin, on cherche parmi tous les ordres collectifs transitifs a priori possibles, α'_i, l'ordre collectif transitif, désignons-le par $\overline{\alpha_i}'$, qui est le moins distant de l'ordre collectif de départ β'.

Notons tout d'abord que pour chacun des ordres collectifs transitifs α'_i concevables, il est considéré, par définition, que son profil des préférences sous-jacent doit se caractériser par le fait que chacun des votants a exactement le même ordre individuel α_i, ce qui revient à supposer qu'ordre collectif et ordres individuels coïncident parfaitement, c.-à-d. que $\alpha'_i = \alpha_i$.

Etant donné que les seuls ordres collectifs transitifs pris en considération doivent remplir cette caractéristique, on a donc toujours $\alpha_i = \alpha'_i$, ce qui nous permet d'utiliser toujours la même notation, donc on indiquera α_i pour un ordre individuel, α_i par le profil des préférences et α_i pour l'ordre collectif.

Nous devons maintenant définir ce que nous entendons par « *distance entre deux ordres collectifs* ».[1]

La distance entre l'ordre collectif β' et un ordre collectif transitif α_i, est le nombre total d'inversions par paires (bilatérales, « *preference reversals* ») auquel il faut procéder dans le profil des préférences β pour passer précisément au profil des préférences α_i (qui se caractérise par le fait que chacun ait individuellement un ordre égal à α_i et où, par la force des choses, l'ordre collectif est également α_i).

L'ordre collectif qui sera retenu, désignons-le par $\overline{\alpha_i}$ avec son profil des préférences sous-jacent $\overline{\alpha_i}$, sera l'ordre collectif parmi tous les ordres α_i possibles pour lequel cette distance, telle que définie, sera la moins élevée.

---

[1] Mathématiquement, il s'agit de définir une métrique (cf. S. Nitzan, *Collective Preference and Choice*, p. 78).

Nous devons donc, premièrement, identifier les ordres collectifs α_i possibles, deuxièmement, pour chacun de ceux-ci calculer la distance en question, et, troisièmement, identifier et retenir l'ordre collectif dont la distance est la moins élevée à l'ordre collectif cyclique de départ β'.

Identifions donc tous les ordres (« *ranking* ») collectifs transitifs a priori possibles des trois projets x, y et z.

Ces ordres sont au nombre de 6, à savoir :

α_1 :	x	y	z
α_2 :	x	z	y
α_3 :	y	x	z
α_4 :	y	z	x
α_5 :	z	x	y
α_6 :	z	y	x

Pour chacun des six profils des préférences, respectivement α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 et α_6 sous-jacents à ces six rankings collectifs – rappelons qu'il est considéré que pour chaque ranking, les neuf ordres individuels sont égaux à ce ranking – calculons le nombre de pairs ordonnées le composant qui sont conformes au profil β de l'ordre collectif β'.

Chercher ce nombre revient également à chercher le nombre d'inversions par paires auxquelles il faut procéder dans le profil des préférences α_i pour atteindre le profil β ou dans le profil β pour atteindre le profil α_i.

Prenons à titre d'exemple le ranking α_5 qui est z x y.

L'outranking matrice de cet ordre collectif transitif z x y est :

	x	y	z	Total	Score Copeland
x	/	9	0	9	1
y	0	/	0	0	0
z	9	9	/	18	2

En comparant la matrice outranking correspondant à α_5 et celle correspondant à β', on constate que le nombre de modifications nécessaires à apporter à la matrice relative à α_5 pour obtenir la matrice relative à β est donnée par la matrice suivante.

	x	y	z
x	/	9 – 6 = 3	0
y	0	/	0
z	9 – 5 = 4	9 – 2 = 7	/

Cette matrice est obtenue en soustrayant chaque fois de 9 le nombre correspondant de la matrice de β.

Chaque nombre relatif à un couple de projets nous indique le nombre de fois qu'il faudrait dans le profil des préférences β' inverser une préférence individuelle au niveau du couple de projets en question pour finir par obtenir α_5.

Prenons la relation bilatérale z>x.

Il faudrait au niveau du profil des préférences de β' procéder à une inversion pour passer de x z à z x en tout quatre fois, et ceci dans le groupe 4.

En effet, si z x y est l'ordre individuel de chacun, donc z x y l'ordre collectif unanime, il y a 9 fois que z>x. Dans le profil de préférences sous revue α_5, tel n'est le cas que 5 fois. Donc, il faut procéder à 9-5=4 inversions.

Pour la relation bilatérale x>y, il faut 9-6=3 inversions, et ceci dans le groupe 3 et pour la relation z>y il faut 9-2=7 changements, et ceci dans les groupes 4 et 3.

Donc, il faut en tout 4+3+7=14 inversions bilatérales pour que β se transforme en α_5.

Autrement dit, α_5 se caractérise au départ par 27-14=13 correspondances bilatérales avec β, c.-à-d. parmi les 27 relations bilatérales qui caractérisent l'ordre collectif β, il y a 27-14=13 coïncidences entre α_5 et β.

Mutatis mutandis, on obtient pour chaque ordre collectif α_i le nombre total d'inversions à effectuer dans le profil de préférences β' pour aboutir au profil de préférences α_i qui se caractérise par le fait et découle du fait que α_i est également l'ordre individuel de chaque votant :

Tableau des changements nécessaires
α_1 : 10
α_2 : 15
α_3 : 13
α_4 : 12
α_5 : 14
α_6 : 17

Le projet α_i le moins distant, c.-à-d. le plus proche, est celui qui nécessite le moins de changement au niveau de β' pour aboutir à α_i ou, ce qui revient au même, au niveau de α pour aboutir à β.

Nous constatons que ce nombre est minimal pour l'ordre collectif α_1. Partant, α_1 est l'ordre non cyclique transitif le plus proche de β et c'est celui qui est dégagé par la méthode de Kemeny Young.

Il convient maintenant de noter que l'ordre collectif $\overline{\alpha}_i$ qui est le moins distant de β', c.-à-d. qui nécessite le moins de changements de paires pour passer de β' à $\overline{\alpha}_i$, est, par définition, également le projet qui, au départ, a le plus de correspondances avec le profil des préférences de départ β'.

Partant, chercher le profil qui requiert le moins de changements ou chercher le profil qui a le plus de correspondances sont deux approches complémentaires aboutissant au même résultat.

Le nombre de correspondances des ordres α_i avec β est donné par le tableau ci-après qui se définit comme la soustraction du nombre total de relation bilatérale 27 avec le nombre de changements nécessaires :

Tableau des coïncidences
α_1 : 27 – 10 = 17
α_2 : 27 – 15 = 12
α_3 : 27 – 13 = 14
α_4 : 27 – 12 = 15
α_5 : 27 – 14 = 13
α_6 : 27 – 17 = 10

C'est donc l'ordre α_1 x y z qui nécessite le moins de changements, à savoir 10, donc qui est le moins distant de β ou, ce qui revient au même, qui se caractérise par le plus de correspondances au départ avec β, à savoir 17, et donc c'est le résultat retenu.

C'est cette deuxième approche, choisir le projet avec le plus de correspondances qui explique la deuxième appellation de la méthode de Kemeny-Young, à savoir Condorcet's maximal agreement method.

Cette dernière conclusion nous procure une procédure d'exécution rapide de la méthode de Kemeny-Young.

Prenons l'autoranking matrice de β. Soit un ordre α_i disons α_5 z x y. Prenons les cases zx, zy et xy et ajoutons-les.

On obtient le nombre de correspondances. Faisons la même chose pour chaque α_i. Retenons l'ordre α_i où ce nombre est le plus élevé.

Pour terminer, notons qu'une autre façon de solutionner la problématique, souvent mais pas toujours équivalente à la méthode de Kemeny-Young, est de briser le cycle au niveau de son chaînon le plus faible.

On a :

$$x \overset{6}{>} y \overset{7}{>} z \overset{5}{>} x$$

Il faudrait alors renverser la relation z>x pour devenir x>z, ce qui donnerait de nouveau l'ordre transitif x y z.

4.4.16. Exemple 16

Soit le profil suivant pour 7 votants et quatre projets :

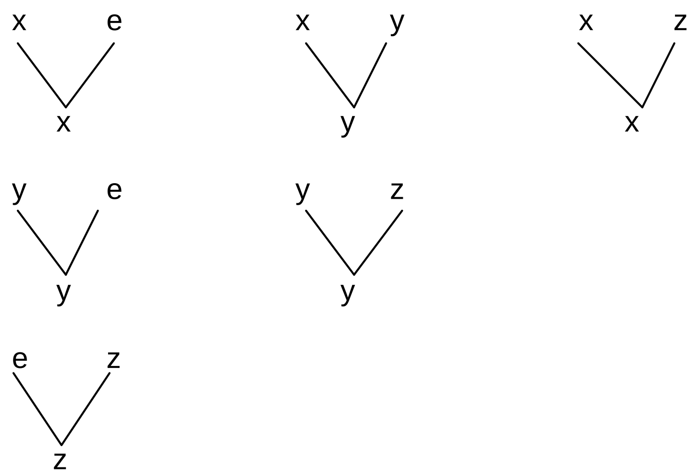
3	x	e	y	z
2	y	x	z	e
1	y	z	x	e
1	z	y	x	e

4.4.16.1. Majorite simple

Aucun projet n'a une majorité simple, les projets x et y obtenant chacun trois voix.

4.4.16.2. Methode de Condorcet

On constate :



Le Condorcet winner est le projet y.

Le Condorcet loser est le projet e.

4.4.16.3. Méthode de Borda

x	e	y	z
3·3	3·2	3·1	3·0
2·2	2·0	2·3	2·1
1	0	3	2
1	0	2	3
15	6	14	7

Le projet x est le Borda winner. Le projet e est le Borda loser.

La matrice de vote est :

	x	e	y	z	Total	Score Copeland
x	/	7	3	5	15	1
e	0	/	3	3	6	-3
y	4	4	/	6	14	3
z	2	4	1	/	7	-1

4.4.16.4. Conclusion

En résumé :

	MS	MC	MB
choix	-	y	x
ordre	x~y>z>e	y x z e	x y z e

Il n'y a pas de gagnant à la majorité simple et les Condorcet et Borda winner, qui existent, sont différents.

Notez que si on éliminait le projet e, qui est le Borda loser et le Condorcet loser, du profil des préférences, ce serait le projet y qui l'emporterait avec la méthode de Borda. Rien ne changerait sur le plan de Condorcet. Autrement dit, en éliminant le Borda loser, le Condorcet winner devient également le Borda winner.

4.4.16.5. Exemple 16a

Soit le profil des préférences :

3	z	x	y
2	x	y	z
1	x	z	y
1	y	z	x

On peut montrer qu'il n'existe de gagnant à la majorité, que z est le Condorcet winner et que x est le Borda winner.[1]

Exemple 16c

Soit le profil des préférences suivant :

A	d	e	a	b	c
B	e	a	c	d	b
C	c	d	e	a	b
D	d	e	b	c	a
E	e	b	a	d	c

Il n'y a pas de projet qui l'emporte à la majorité, les projets A et D obtenant chacun deux voix.

Il existe un Condorcet winner, à savoir le projet d. Vérifiez-le. Existe-il un Condorcet loser ?

Le projet e est le Condorcet winner. Vérifiez-le.

Force est de constater qu'il existe une majorité de votants, les votants A, C et D, qui préfère le projet d au Borda winner. Cela résulte du fait que le Borda winner n'est pas le Condorcet winner.

4.4.17. Exemple 17A

Soit le profil des préférences pour 4 votants et 4 projets :

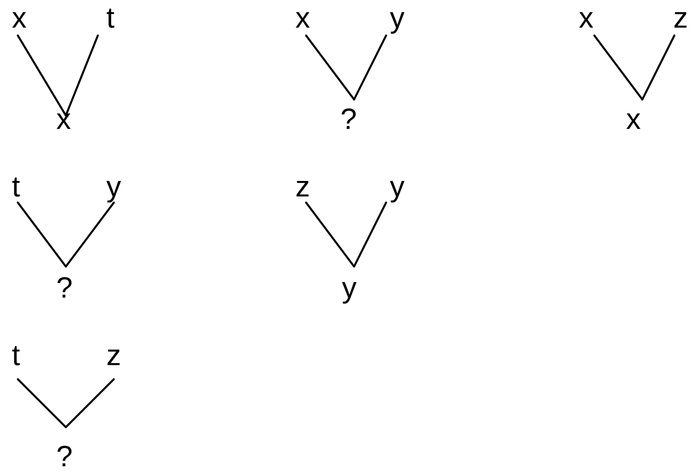
2	x	t	y	z
1	y	x	z	t
1	z	y	x	t

[1] Cet exemple est dû à Fishburn.

4.4.17.1. Majorite simple

Le projet x l'emporte avec 2 voix contre chaque fois 1 voix pour les projets y et z et aucune pour t.

4.4.17.2. Methode de Condorcet



L'outranking matrice est :

	x	y	z	t	Total	Score Copeland
x	/	2	3	4	9	2
y	2	/	3	2	7	1
z	1	1	/	2	4	-2
t	0	2	2	/	4	-1

Il n'y a pas de Condorcet winner, aucun projet n'ayant un score de 3. Si on définissait le Condorcet winner non pas comme le projet qui l'emporte face à chacun des autres projets, mais comme le projet qui ne perdrait (donc soit gagnerait, soit sortirait avec un remis)[1] contre aucun des autres projets, ce serait le projet x qui serait le Condorcet winner. Il gagne z et t et fait ex aequo avec le projet y. C'est ce projet qui a le score le plus élevé.

Le core comprend les projets x et y.

Dans cet ordre d'idées, l'ordre collectif serait x y z~t.

[1] Il arrive que l'on appelle dans la littérature un projet qui a au moins autant de voix que le projet concurrent le « *Condorcet candidate* ».

4.4.17.3. Méthode de Borda

x	t	y	z
2·3	2·2	2·1	2·0
2	0	3	1
1	0	2	3
9	4	7	4

C'est le projet x qui est le Borda winner.

4.4.17.4. Conclusion

En résumé :

	MS	MC	MB
choix	x	-	x
ordre	x>y~z>t	(x y t z)	x>y>t~z

La majorité simple et la méthode de Borda donnent le même résultat, le projet x. Par contre, il n'existe pas de Condorcet winner au sens strict. Il n'existe pas non plus de Borda winner au sens strict.

4.4.17.5. Exemple 17B

Soit le profil des préférences suivant :

Groupe I	8	a	b	c
Groupe II	7	b	c	a
Groupe III	6	c	a	b

Montrez que le projet a l'emporte à la majorité simple, qu'il n'existe pas de vainqueur au sens de Borda et qu'il n'existe pas de Condorcet winner.

4.4.17.6. Exemple 17C

Soit le profil des préférences suivant :

Groupe I	4	h	s	e
Groupe II	3	e	h	s
Groupe III	5	s	e	h

C'est le projet s qui l'emporte à la majorité simple. A noter qu'il y a une majorité (7 voix) qui préfère le projet h au projet s. Si le projet e n'était pas présent, h l'emporterait avec 7 voix contre 5 pour s, donc avec une majorité absolue.

La méthode de Condorcet ne dégage pas de Condorcet winner.

D'après la méthode de Borda, c'est de nouveau le projet s qui l'emporte.

s	h	e
4·1	4·2	4·0
3·0	3·1	3·2
5·2	5·0	5·1
14	11	11

4.4.18. Exemple 18

Soit le profil suivant pour 7 votants et 5 projets :

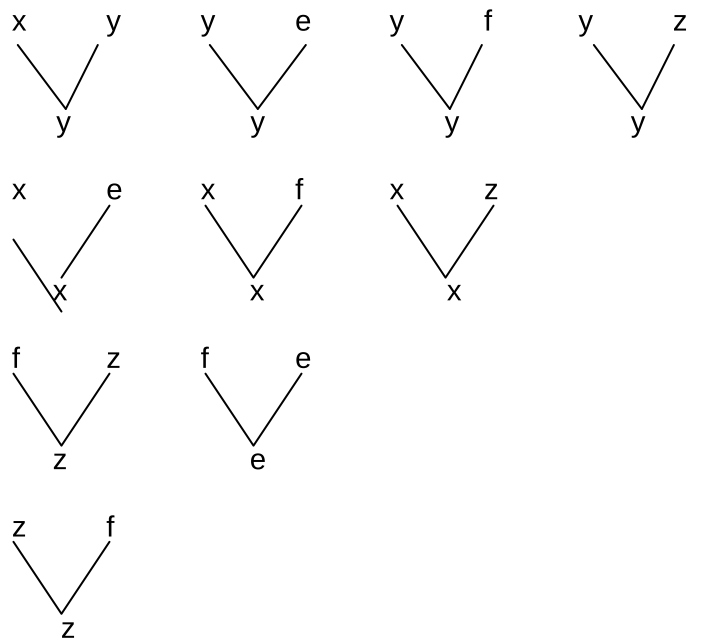
3	x	e	y	z	f
2	y	x	z	e	f
1	y	z	f	x	e
1	z	y	x	f	e

4.4.18.1. Majorite simple

Aucun projet ne l'emporte à la majorité simple.

4.4.18.2. Methode Condorcet

Le projet y est le Condorcet winner, car :



4.4.18.3. Méthode de Borda

La méthode de Borda donne :

x	e	y	z	f
3·4	3·3	3·2	3·1	3·0
2·3	2·1	2·4	2·2	2·0
1	0	4	3	2
2	0	3	4	1
21	11	21	14	3

Il n’y a pas de Borda winner au sens strict dans la mesure où les projets x et y se classent ex aequo.

La matrice de vote est :

	x	e	y	z	f	Total	Score Copeland
x	/	7	3	5	6	21	3
e	0	/	3	3	5	11	1
y	4	4	/	6	7	21	4
z	2	4	1	/	7	14	2
f	1	2	0	0	/	3	0

4.4.18.4. CONCLUSION

En résumé :

	MS	MC	MB
choix	-	y	-
ordre	x~y>z>e~f	y>x>z>e>f	x~y>z>e>f

La seule méthode qui dégage un résultat unique est celle de Condorcet.

4.4.19.

4.4.19.1. NEUTRALITE ABSOLUE[1]. EXEMPLE 19A.

Soit le profil des préférences suivant pour 6 votants :

(1)	x	y	z
(2)	x	z	y
(3)	y	x	z
(4)	y	z	x
(5)	z	x	y
(6)	z	y	x

Nous notons que ce profil se caractérise par le fait que chacun des 6 ordres individuels a priori possibles entre x, y et z figure dans le profil puisqu'étant l'ordre individuel d'un des six votants.

Ce profil pourrait être qualifié de parfaitement neutre puisqu'il n'y a ni majority winner, ni Condorcet winner, ni Borda winner et chacun ayant un score de Copeland 0.

La matrice des votes prend l'allure suivante :

	x	y	z	Total	Score Copeland	Nombre de 1ières places
x	/	3	3	6	0 (=0+0)	2
y	3	/	3	6	0 (=0+0)	2
z	3	3	/	6	0 (=0+0)	2

4.4.19.2. ABANDON MARGINAL DE LA NEUTRALITE. EXEMPLE 19B.

Changeons l'ordre (6) en invertissant à la fin y x pour obtenir l'ordre (6') z x y.

Nous voyons bien que le score de Borda du projet x passe de 6 à 7 et celui du projet y de 6 à 5. x devient le Borda winner. Il n'y a toujours pas de Condorcet winner ni de majority winner.

---

[1] En mathématiques, l'on parlerait d'un « *kernel* ».

4.4.19.2. ABANDON MARGINAL EN TETE. EXEMPLE 19C.

Changeons l'ordre (3) en tête, en invertissant de nouveau y x pour obtenir l'ordre (3') x y z.

Cette fois-ci, on a le même changement dans les scores Borda que précédemment et dans les scores Copeland, mais on assiste également à un changement sur le plan du nombre de premières places.

Le projet x non seulement devient le Borda winner, mais également le majority winner.

4.4.19.3. CONDITION POUR QUE EGALEMENT UN PROJET DEVIENNE LE CONDORCET WINNER. EXEMPLE 19D.

Si nous cumulons les deux changements ci-dessus, le nouveau profil devient :

(1)	x	y	z
(2)	x	z	y
(3')	x	y	z
(4)	y	z	x
(5)	z	x	y
(6')	z	x	y

Nous voyons que ce cumul des deux changements ne permet pas au projet x de devenir le Condorcet winner puisque si x l'emporte contre y, il y a toujours un ex aequo avec le projet z.

Par contre, si on pratiquait deux changements successifs au même ordre individuel (6) pour passer par un premier changement de z y x à z x y, et puis par un deuxième changement à x z y, alors le projet x deviendrait le Borda winner, le majority winner et le Condorcet winner.

La matrice des votes devient :

	x	y	z	Total	Score Copeland	Nombre 1ières places
x	/	3+1=4	3+1=4	(6+2)=8	2	3
y	3-1=2	/	3	(6-1)=5	-1	2
z	3-1=2	3	/	(6-1)=5	-1	1

Cette matrice peut encore s'écrire :

	x	y	z	Score Copeland
x	/	1	1	2
y	-1	/	0	-1
z	0	-1	/	-1